J. Pijar MIPA, Vol. V No.2, September : 76 - 80
ISSN 1907-1744

ANALISIS TITIK EKUILIBRIUM ENDEMIK MODEL EPIDEMI SEIV DENGAN LAJU PENULARAN NONLINEAR

Nurul Hikmah
Program Studi Pendidikan Matematika PMIPA FKIP Universitas Mataram
Jl. Majapahit No. 62 Mataram 83125
Email : nurul23483@yahoo.co.id

Abstrak. Pada paper ini diberikan model epidemi SEIV dengan laju penularan nonlinear. Model ini menjelaskan tentang efek psikologi dari perubahan perilaku individu yang rentan ketika jumlah individu yang terinfeksi mengalami peningkatan. Dalam paper ini akan dilakukan analisis global dari model epidemi SEIV dan menyelidiki kestabilan global titik ekuilibrium endemik , selanjutnya diperoleh bahwa titik ekuilibrium endemik model epidemi SEIV stabil global.

Kata Kunci : SEIV, titik ekuilibrium, kestabilan

ANALYSIS OF ENDEMIC EQUILIBRIUM POINT FOR A SEIV EPIDEMIC MODEL WITH NONLINEAR INCIDENCE RATE

Abstract. In this paper, we consider a SEIV epidemic model with nonlinear incidence rate. This model describes the psychological effect of the behavioral change of susceptible individuals when the number of infectious individuals increases. By carrying out a global analysis of the model and studying the globally stability of the endemic equilibrium in this paper, we show that the endemic equilibrium of a SEIV epidemic model is globally stable.

Key words: SEIV, equilibrium point, stability

I. PENDAHULUAN

Pada pemodelan penyakit menular, laju penularan memiliki peranan yang sangat penting dalam memberikan deskripsi yang rasional tentang dinamika penyakit[9]. Sebagian besar model epidemi klasik menggunakan laju penularan bilinier yaitu linear dalam interaksi antara individu yang rentan dan sakit, berbentuk βIS dengan laju kontak perkapita (β), jumlah individu terinfeksi (I) dan jumlah individu yang rentan (S).

Secara umum, laju penularan bilinier memiliki beberapa kelemahan, antara lain asumsi homogenitas pada populasi yang belum tentu valid dan pertimbangan dari efek kejenuhan. Efek kejenuhan yaitu jika suatu wabah penyakit menyerang suatu masyarakat maka secara psikologis masyarakat akan merubah cara penanganan penyakit tersebut. Pada Liu, dkk [11] telah diselidiki laju penularan non linier dengan memasukkan efek dari perubahan prilaku yang berbentuk $\beta I^p S/(1+\alpha I^q)$, dengan $\beta, \alpha, p, q > 0$.

Jika suatu penyakit mewabah dalam masyarakat, maka salah satu metode yang digunakan untuk mengontrol penyakit tersebut adalah dengan vaksinasi. Contoh penyakit tersebut adalah hepatitis, campak, influenza, dan lainnya. Tetapi kenyataannnya tidak mungkin untuk memberikan vaksin ke seluruh individu yang rentan dalam suatu masyarakat, khususnya dinegara-negara yang kurang memiliki ketersediaan vaksin. Berdasarkan hasil klinis dari Teitelbaulm dan Edmunds [7] ditunjukkan bahwa vaksin hanya memberikan imunitas sementara terhadap suatu penyakit.

Analisis dari paper ini adalah menggabungkan antara laju penularan non linear dan penyusutan vaksin preventifnya dengan menggunakan model epidemi SEIV, dengan jumlah individu yang rentan (S), jumlah individu yang sakit tetapi belum terinfeksi (E), jumlah individu yang terinfeksi (I), dan jumlah individu yang diberikan vaksin (V). Laju penularan non linear diasumsikan berbentuk $\beta SI/\varphi(I)$, dimana $1/\varphi(I)$ menunjukkan ukuran psikologis atau efek hambatan dari prilaku individu yang rentan ketika jumlah individu yang terinfeksi meningkat. Hal ini dikarenakan jumlah kontak yang efektif antara individu yang terinfeksi dan individu yang rentan menurun pada level infeksi yang tinggi, akibat dari karantina individu yang terinfeksi atau perlindungan terhadap individu yang rentan. Selanjutnya akan diselidiki eksistensi dan kestabilan titik ekuilibrium endemik dengan laju penularan nonlinear berbentuk $\beta SI/\varphi(I)$.

II. PEMBAHASAN

2.1 Model Epidemi SEIV

Dalam model epidemi SEIV populasi dibagi menjadi 4 kelas yaitu kelas rentan (S) menyatakan kelas individu yang belum terjangkit penyakit, kelas *exposed* atau laten (E) menyatakan kelas individu yang telah terinfeksi tapi belum sakit, kelas sakit (I) menyatakan kelas individu yang telah terjangkit penyakit dan memiliki kemampuan untuk menularkannya ke kelas rentan dan kelas vaksinasi (V) menyatakan kelas individu rentan yang diberi vaksin. Model ini diterapkan pada penyakit yang memiliki masa inkubasi cukup lama. Selama masa laten individu yang terinfeksi belum menunjukkan gejala penyakit dan menularkannya kepada individu yang lain. Salah satu contoh yang dikategorikan dalam model ini adalah hepatitis B.

Misalkan populasi berubah menurut waktu yaitu $S(t), E(t), I(t)$ dan $V(t)$, maka:

$$S(t) + E(t) + I(t) + V(t) = N(t)$$

Dengan laju penularan $\beta SI/\varphi(I)$, model SEIV dapat disajikan dalam sistem persamaan diferensial tak linear orde satu yang berdimensi 4 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-p)\pi - \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I)} - \mu S(t) + \omega V(t). \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I)} - (\mu+\sigma)E(t). \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma(t) - (\mu+\gamma)E(t). \\ \frac{dV}{dt} &= p\pi - \mu V(t) + \gamma I(t) - \omega V(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Misalkan fungsi $\varphi(I) = 1 + \alpha I$, dengan $\alpha > 0$ dan diasumsikan fungsi $\varphi(I)$ memenuhi $\varphi(0) = 1$ dan $\dot{\varphi}(I) \geq 0$ maka $\varphi(I) \geq 1$, untuk setiap $I(t) \geq 0$.

Berdasarkan sistem (1) diperoleh

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

Persamaan di atas menyatakan laju populasi total yang memenuhi persamaan diferensial sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = \pi - \mu N. \tag{2}$$

Jika $N(0) = N_0$ merupakan jumlah populasi awal pada saat $t = 0$, maka penyelesaian dari persamaan (2) adalah:

$$N(t) = N_0 e^{-\mu t} + \frac{\pi}{\mu}(1 - e^{-\mu t}). \tag{3}$$

Misalkan $N_0 = S_0 + E_0 + I_0 + V_0 = \frac{\pi}{\mu}$ merupakan nilai awal dari persamaan (3), maka diperoleh jumlah populasi yang konstan yaitu $N = \frac{\pi}{\mu}$. Didefinisikan:

$$\Omega = \left\{(S, E, I, V) \in R_4^+ \middle| 0 \leq S + E + I + V \leq \frac{\pi}{\mu}\right\}.$$

Daerah Ω merupakan daerah penyelesaian dari sistem (1) dan invarian positif untuk $t = 0$. Dengan mengambil,

$V(t) = \frac{\pi}{\mu} - S(t) - E(t) - I(t)$, maka sistem (1) dapat direduksi menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-p)\pi - \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I)} - \mu S(t) + \omega\left(\frac{\pi}{\mu} - S(t) - E(t) - I(t)\right). \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I)} - (\mu+\sigma)E(t). \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma(t) - (\mu+\gamma)E(t). \end{aligned} \tag{4}$$

Dengan menggunakan fakta pada sistem (1) , didefinisikan $N_1 = S(t) + E(t) + I(t)$,

sehingga dari sistem (4) diperoleh:

Kondisi $I = 0$ menunjukkan bahwa sistem (4) bebas dari penyakit, akibatnya $N_1 \to \frac{[\mu(1-p)+\omega]}{\mu(\mu+\omega)}$.

Dengan demikian daerah penyelesaian sistem (4) adalah:

$$\Omega_1 = \left\{(S, E, I) \in R_+^3 : 0 \leq S + E + I \leq \frac{[\mu(1-p)+\omega]}{\mu(\mu+\omega)}\right\}. \tag{5}$$

2.2 Eksistensi Titik Ekuilbrium Endemik

Sistem (4) memiliki sebuah titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0\left(\frac{[\mu(1-p)+\omega]}{\mu(\mu+\omega)}, 0, 0\right)$ [5].

Didefinisikan angka reproduksi dasar,

$$R_0 = \frac{[\mu(1-p)+\omega]\pi\beta\sigma}{\mu(\mu+\alpha)(\mu+\omega)(\mu+\gamma)}.$$

Titik ekuilibrium endemik dari sistem (4) yaitu $P^*(S^*, E^*, I^*)$, dengan $S^* = \frac{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)\varphi(I)}{\beta\sigma}$, $E^* = \frac{(\mu+\gamma)}{\sigma}I$,

dan I^* merupakan akar positif dari persamaan:

$$H(I^*) = \frac{[\mu(1-p)+\omega]\pi}{\mu(\mu+\omega)} - \frac{(\mu+\alpha+\omega)(\mu+\gamma)+\sigma\omega}{\sigma}I^* - \frac{(\mu+\alpha)(\mu+\omega)(\mu+\gamma)}{\beta\sigma}\varphi(I^*).$$

2.3 Sifat Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Endemik

Teorema 2.3 Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik $P^*(S^*, E^*, I^*)$ sistem (4) stabil asimtotik lokal.

Bukti. Matriks Jacobian dari sistem (4) di titik $P^*(S^*, E^*, I^*)$ adalah:

$$Df(S^*, E^*, I^*) = \begin{bmatrix} -(\mu+\omega) - \frac{(\mu+\sigma)E^*}{S^*} & -\omega & -\frac{\beta S^*}{\varphi(I^*)}\left(1 - \frac{I^*\varphi'(I^*)}{\varphi'(I^*)}\right) - \omega \\ \frac{(\mu+\sigma)E^*}{S^*} & -(\mu+\sigma) & \frac{\beta S^*}{\varphi(I^*)}\left(1 - \frac{I^*\varphi'(I^*)}{\varphi'(I^*)}\right) \\ 0 & \sigma & -(\mu+\gamma) \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobian di atas diperoleh persamaan karakteristik

$\lambda^3 + Q_1\lambda^2 + Q_2\lambda + Q_3 = 0$, dengan

$$Q_1 = 3\mu + \omega + \sigma + \gamma + \frac{(\mu+\sigma)E^*}{S^*} > 0,$$

$$Q_2 = \left(\mu + \omega + \frac{(\mu+\sigma)E^*}{S^*}\right)(2\mu + \sigma + \gamma) + \frac{\sigma\beta S^* I^* \varphi'(I^*)}{\varphi^2(I^*)} + \frac{\omega(\mu+\sigma)E^*}{S^*} > 0$$

$$Q_3 = (\mu+\omega)\left(\frac{\sigma\beta S^* I^* \varphi'(I^*)}{\varphi^2(I^*)}\right) + \omega\frac{(\mu+\sigma)E^*}{S^*}(\mu+\gamma) + \sigma\omega\frac{(\mu+\sigma)E^*}{S^*} + \frac{\beta\sigma(\mu+\sigma)E^*}{\varphi(I^*)} > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, seluruh akar-akar persamaan karakteristik di atas mempunyai bagian real negatif sehingga titik ekuilibrium endemik $P^*(S^*, E^*, I^*)$ stabil asimtotik lokal.

2.4 Persistensi dari Suatu Penyakit

Persistensi dapat dinterpretasikan sebagai kelangsungan hidup populasi dalam suatu lingkungan. Berikut ini akan dibahas tentang teorema persistensi.

Teorema 2.4 Jika $R_0 > 1$, maka $\varepsilon > 0$ terdapat dengan kondisi awal independen yang memenuhi $E_0 + I_0 > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty} \inf X(t) > \varepsilon$, untuk $X = S, E, I$.

Bukti. Didefinisikan, $X_1 = int(\mathbb{R}^3_+)$, $X_2 = bd(\mathbb{R}^3_+)$.

Berdasarkan persamaan (5) diperoleh bahwa Ω_1 merupakan himpunan terbatas dan invarian positif, sehingga terdapat himpunan kompak M_0 dengan seluruh solusi dari sistem (4) yang berawal dari $\mathbb{R}^3_+$ akan masuk dan berakhir di M_0. Berikut ini adalah sifat dari $M_0 \subset \Omega_1$ dengan $\delta > 0$

1. Jika $x \in \Omega_1$ dan $d(x, X_2) < \delta$ maka:
$d(X(t), M_0) \to 0, t \to \infty.$

2. Irisan dari $M_0 \cap M_{0\delta}(X_2)$, dengan
$M_{0\delta}(X_2) = \{x \in X : d(x, X_2) < \delta\}$ memiliki *closure* yang kompak.

Misalkan $\omega(x_0)$ himpunan $\omega - limit$ dari solusi $x(t, x_0)$ dari sistem (4) dengan $x_0 \in \mathbb{R}^3_+$, akan ditunjukkan bahwa $\Omega_2 = \cup_{y\in Y} \omega(y)$, $Y = \{x_0 \in X_2 | x(t, x_0) \in X_2, \forall t > 0\}$.

Solusi dari sistem (4) pada awalnya berada di $X_2 = bd(\mathbb{R}^3_+)$ akan tetapi pada akhirnya meninggalkan $bd(\mathbb{R}^3_+)$ namun hal tersebut tidak berlaku untuk yang berada di sumbu-S sehingga sumbu-S merupakan himpunan invarian, akibatnya $Y = \{(S, E, I) \in bd(\mathbb{R}^3_+) | E = I = 0\}$. Jadi seluruh solusi yang berawal di sumbu-S akan konvergen ke P_0 sehingga $\Omega_2 = P_0$ dan Ω_2 merupakan liput dari P_0 yang bersifat terasing (*isolated) da*n *acyclic*.

Selanjutnya akan dibuktikan P_0 merupakan *weak repeller* untuk X_1.

P_0 merupakan *weak repeller* untuk X_1 jika setiap solusi yang berawal di $x_0 \in X_1$, maka:

$$\lim_{t\to\infty} \sup d(x(t, x_0), P_0) > 0 \qquad (6)$$

Untuk membuktikan (6) akan dibuktikan telebih dahulu

$$W^s(P_0) \cap int(\mathbb{R}^3_+) = \emptyset \qquad (7)$$

dengan $W^s(P_0)$ merupakan *manifold* stabil dari P_0.

Misalkan persamaan (6) tidak berlaku untuk bebarapa solusi $x(t, x_0)$ dengan $x_0 \in X_1$.

Karena sistem (4) invarian positif maka $\lim_{t\to\infty} \inf d(x(t, x_0), P_0) = \lim_{t\to\infty} \sup d(x(t, x_0), P_0 = 0$ dan $\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = P_0$. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan (7) tidak berlaku.

Berdasarkan Lemma 2 [5] titik ekuilibrium bebas penyakit P_0 tidak stabil untuk $R_0 > 1$ dan matriks Jacobian dari sistem (5) di titik P_0 ($J(P_0)$) memiliki nilai eigen bernilai positif yang dinotasikan dengan λ_+ dan nilai eigen bernilai negatif yang dinotasikan dengan λ_-. Sistem (5) memiliki 2 nilai eigen bernilai negatif yaitu $\lambda_{-1} = -(\mu + \omega)$ dan λ_{-2}. Lebih lanjut akan ditentukan letak dari $E^s(P_0)$ yang merupakan ruang eigen stabil dari P_0. Vektor eigen dari ($J(P_0)$) yang bersesuaian dengan $\lambda_{1-} = -(\mu + \omega)$ adalah $(1, 0, 0)^T$. Untuk λ_{-2} akan ditinjau dari 2 kasus, yaitu:

1. Jika $\lambda_{-2} \neq -(\mu + \omega)$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_{-2} memiliki struktur $(0, n_1, n_2)^T$, dengan n_1, n_2 memenuhi persamaan vektor eigen berikut ini:

$$\begin{bmatrix} -(\mu+\sigma) & \frac{\beta[\mu(1-p)+\omega]\Pi}{\varphi(I)\mu(\mu+\omega)} \\ \sigma & -(\mu+\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \lambda_{-2} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

2. Jika $\lambda_{1-} = -(\mu + \omega)$, maka λ_{1-} merupakan pengulangan dari nilai eigen dan berkorespondensi dengan generalisasi vektor eigen yang memiliki struktur $(*, n_1, n_2)^T$, dengan nilai dari * irrelevant untuk n_1 dan n_2 yang memenuhi persamaan vektor di atas.

Dari kedua kasus tersebut akan dibuktikan bahwa $(n_1, n_2) \in \mathbb{R}^+_2$. Berdasarkan teorema Perron-Frobenius [3] matriks tersebut memiliki niai eigen dominan, yaitu λ_+, akan tetapi setiap vektor eigen tidak terletak di oktan positif sehingga tidak bersesuaian dengan nilai eigen dominannya. Artinya $(n_1, n_2) \notin \mathbb{R}^+_2$, sehingga

$E^s(P_0) \cap int(\mathbb{R}^3_+) = \emptyset$ dan

$W^s(P_0) \cap int(\mathbb{R}^3_+) = \emptyset$.

2.5 Sifat Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Endemik

Misalkan fungsi $\varphi(I) = 1 + \alpha I, (\alpha > 0)$. Jadi sistem (5) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (1-p)\pi - \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I} - \mu S(t) + \omega\left(\frac{\pi}{\mu} - S(t) - E(t) - I(t)\right).$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha I} - (\mu+\sigma)E(t) \qquad (9)$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E(t) - (\mu+\gamma)I(t).$$

Untuk menyelidiki kestabilan global dari titik ekuilibrium endemik di daerah Ω_1, akan digunakan pendekatan geometri, lihat Li dan Muldowney (1996).

Misalkan $x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$ merupakan fungsi yang diferensiabel kontinu (C^1) untuk x pada himpunaan terbuka $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$. Diberikan sistem

$$x' = f(x), \quad (10)$$

dengan $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari (10) yang memenuhi $x(0, x_0) = x_0$.

Diberikan dua asumsi yaitu :

(H_1) Terdapat himpunan kompak $K \subset \Omega_1$.

(H_2) Persamaan (10) memiliki titik ekuilibrium tunggal $\bar{x}$ di Ω_1.

Lemma 2.5. Misalkan persamaan (10) memenuhi asumsi (H_1) dan (H_2). Jika persamaan (10) memenuhi kriteria Bendixson, yang tahan terhadap perturbasi lokal (C^1) dan mempertahankan sifat (C^1) di seluruh titik nonwandering yang bukan ekuilibrium f untuk sistem (9), maka $\bar{x}$ stabil global di Ω_1.

Bukti. Diketahui fungsi f memenuhi kriteria Bendixson yang tahan terhadap perturbasi lokal C^1 dan mempertahankan sifat C^1 di seluruh titik *nonwandering* yang bukan ekuilibrium f dari sistem (9), maka untuk setiap titik bukan ekuilibrium dari persamaan (10) *wandering*.

Jika $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, dengan seluruh solusi persamaan (10) terbatas maju, maka untuk setiap $x_0 \in \Omega_1$, $\omega(x_0) \neq \emptyset$. Berdasarkan asumsi ($H_2$) maka terdapat titik ekuilibrium tunggal $\bar{x}$ di Ω_1, sehingga $\omega(x_0) = \bar{x}$, untuk setiap $x_0 \in \Omega_1$. Berdasarkan asumsi (H_1) terdapat himpunan kompak $K \subset \Omega_1$, maka himpunan ω –limit merupakan singleton $\{\bar{x}\}$. Dengan demikian $\bar{x}$ stabil global di Ω_1.

Teorema 2.5. Diberikan,

$$\bar{\omega} = min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \left((\beta(\mu(1-p)+\omega)+\omega)\prod\right)/\left(\mu(\mu+\omega)\right)\right\}$$

Jika $R_0 > 1$ dan $\omega \leq \bar{\omega}$ maka titik ekuilibrium endemik P^* dari sistem (9) stabil global di Ω_1.

Bukti. Berdasarkan teorema 2.3, jika $R_0 > 1$ maka P^* merupakan titik ekuilibrium tunggal di Ω_1. Karena sistem (9) memenuhi asumsi (H_1), maka terdapat himpunan kompak pada Ω_1.

Matriks Jacobian dari sistem (9) adalah:

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - (\mu+\omega) & -\omega & -\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} - \omega \\ \frac{\beta I}{1+\alpha I} & -(\mu+\sigma) & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} \\ 0 & \sigma & -(\mu+\gamma) \end{bmatrix}$$

*Additive compound m*atriks kedua dari matriks Jacobian di atas adalah, $J^{[2]} =$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - 2\mu - \omega - \sigma & -\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + \omega \\ \sigma & -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - 2\mu - \omega & -\omega \\ 0 & \frac{\beta I}{(1+\alpha I)^2} & -2\mu - \sigma - \gamma \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dibentuk fungsi,

$$P(x) = P(S, E, I) = diag\left(1, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right).$$

Dengan demikian $P^{-1} = diag\left(1, \frac{I}{E}, \frac{I}{E}\right)$,

$P_f = diag\left(0, \left(\frac{E}{I}\right)_f, \left(\frac{E}{I}\right)_f\right)$, dan

$$P_f P^{-1} = diag\left(0, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right).$$

Didefinisikan $B = P_f P^{-1} + PJ^{[2]}P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - 2\mu - \omega - \sigma & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}\left(\frac{I}{E}\right) & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + \omega\left(\frac{I}{E}\right) \\ \sigma\left(\frac{E}{I}\right) & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \frac{\beta I}{1+\alpha I} - 2\mu - \omega - \gamma & -\omega \\ 0 & \frac{\beta I}{1+\alpha I} & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \sigma - \gamma \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, dengan

$$B_{11} = -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - 2\mu - \omega - \sigma,$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}\left(\frac{I}{E}\right) & \frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2} + \omega\left(\frac{I}{E}\right) \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} \sigma\left(\frac{E}{I}\right) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \frac{\beta I}{1+\alpha I} - 2\mu - \omega - \gamma & -\omega \\ \frac{\beta I}{1+\alpha I} & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \sigma - \gamma \end{bmatrix}$$

Karena berlaku untuk norm di $\mathbb{R}^3$, maka $|(u, v, w)| = maks\{|u|, |v+w|\}$ dan μ merupakan ukuran Lozinskiiˇ yang sesuai dengan norm sehingga $\mu(B) \leq sup\{g_1, g_2\}$, dengan $g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|$ dan $g_2 = \mu_1(B_{22}) + |B_{21}|$.

Selanjutnya,

$$\mu_1(B_{11}) = -\frac{\beta I}{1+\alpha I} - 2\mu - \omega - \sigma, \quad |B_{21}| = \sigma\left(\frac{E}{I}\right).$$

$$|B_{12}| = maks\left\{\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}\left(\frac{I}{E}\right),\quad \left(\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}+\omega\right)\frac{I}{E}\right\} = \left(\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}+\omega\right)\frac{I}{E},$$

$$\mu_1(B_{22}) = maks\begin{bmatrix} \frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-\frac{\beta I}{1+\alpha I}-2\mu-\omega-\gamma & -\omega \\ \frac{\beta I}{1+\alpha I} & \frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-2\mu-\sigma-\gamma \end{bmatrix}$$

$$= maks\left\{\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-\frac{\beta I}{1+\alpha I}-2\mu-\omega-\gamma+\frac{\beta I}{1+\alpha I}, \frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-2\mu-\sigma-\gamma+\omega\right\}$$
$$= \frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-2\mu-\gamma\ maks\{-\omega,\omega-\sigma\}.$$

Jadi,

$$g_1 = -\frac{\beta I}{1+\alpha I}-2\mu-\omega-\sigma+\left(\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}+\omega\right)\frac{I}{E}$$

$$g_2 = \sigma\left(\frac{E}{I}\right)+\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-2\mu-\gamma\ maks\{-\omega,\omega-\sigma\}.$$

Dari sistem (9) diperoleh:

$$\frac{\beta SI}{E(1+\alpha I)} = \frac{E'}{E}+\mu+\sigma, \frac{\sigma E}{I} = \frac{I'}{I}+\mu+\gamma.$$

Dari persamaan di atas diperoleh:

$$g_1 = -\frac{\beta I}{1+\alpha I}-2\mu-\omega-\sigma$$
$$+\left(\frac{\beta S}{(1+\alpha I)^2}+\omega\right)\frac{I}{E} \le -\frac{\beta I}{1+\alpha I}+\omega\frac{I}{E}-\mu-\omega.$$

Jika $\omega \le \frac{\sigma}{2}$ maka

$$g_2 = \sigma\left(\frac{E}{I}\right)+\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-2\mu$$
$$-\gamma\ maks\{-\omega,\omega-\sigma\} \le -\mu-\omega+\frac{E'}{E}.$$

Jika $\omega \le ((\beta(\mu(1-p)+\omega)+\omega)\prod)/(\mu(\mu+\omega))$

maka, $-\frac{\beta I}{1+\alpha I}+\omega\frac{I}{E} \le 0.$

Jadi $(B) = -\mu-\omega+\frac{E'}{E}+\text{maks}\left\{0,-\frac{\beta I}{1+\alpha I}+\omega\frac{I}{E}\right\}$

$$= -\mu-\omega+\frac{E'}{E}.$$

Untuk setiap solusi $(S(t),E(t),I(t))$ dari sistem (9) dengan $(S(0),E(0),I(0)) \in K$, maka:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B)ds \le \frac{1}{t}\log\frac{E(t)}{E(0)}-(\mu+\omega).$$

Akibatnya,

$$\bar{q}_2 = \lim_{t\to\infty}\sup\ sup_{x\in K}\frac{1}{t}\int_0^t \mu(B)\,ds \le -\frac{(\mu+\omega)}{2} < 0.$$

Berdasarkan Lemma 2.5, jika $R_0 > 1$ dan $\omega \le \bar{\omega}$ maka titik ekuilibrium P^* dari persamaan (10) stabil global di Ω_1.

III. KESIMPULAN

Model epidemi SEIV dengan laju penularan nonlinear memiliki sebuah titik ekuilibrium endemik yaitu $P^*(S^*,E^*,I^*)$. Dengan melakukan análisis secara global terhadap titik ekulibrium endemiknya, diperoleh jika $R_0 > 1$, maka $P^*(S^*,E^*,I^*)$ memiliki sifat stabil global.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Butler, G.J. dan Waltman. P. 1986. Persistence in Dynamical System, *Proc. Am. Math. So,* 96:425-430.

[2] Dickmann, O. dan Heesterbeek, J.A.P. 2000. Mathematical Epidemiology of Infectious Disease; *Model Building, Analysis and Interpretation*. England : Jhon Wiley and Sons. Ltd.

[3] D.G. Luenberger. 1979. *Dynamic System; Theory, Models, & Applications*, John Wiley & Sons, Canada.

[4] J.A. Yorke, W.P. London. 1973. Recurrent outbreaks of measles, chickenpox, and mumps II, *AM. J. Epidemiol,* 98, 469-482.

[5] Hikmah, N. *Analysis of disease-free equilibrium point for a SEIV epidemic model with nonlinear incidence rate.* Makalah disampaikan pada Seminar Internasional Matematika dan Penerapannya Jurusan Matematika FMIPA UGM, Yogyakarta, 12 Oktober 2009.

[6] L. M. Cai, X.Z. Li. 2009. Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate, *Appl. Math. Model,*33,2919-2926.

[7] M. A. Titelbaulm, M. Edmunds. 1999. Immunization and Vaccine-Preventable Illness, *Stat. Bull. Metrop. Insur. Co.,* 80, 13-20.

[8] R.H. Thieme. 1993. persistence under relaxed point-dissipativity(with application to an endemic model), *SIAM J. Math. Anal.,* 24, 407-435.

[9] S.A. Levin, T.G. dan Hallam, L.J. Gross. 1990. *Applied Mathematical Ecology*, Springer-Verlag, NewYork.

[10]V. Capasso, G. Serio. 1978. A generalization of Kermarck-Mckendrick deterministic epidemic model, *Math. Boisci.* 42, 43-61.

[11]W.M. Liu, S.A. Levin, Y. Iwasa. 1986. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. *Jurnal Math Bio*, 25, 359-380.