KARAKTERISTRIK DARI SEMIGRUP YANG SETIAP BI-IDEALNYA PRIME KUAT

Nani Kurniati

Prodi. Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mataram
Jl. Majapahit No. 62 Mataram, 83125

Abstrak. Dalam tulisan ini akan dibahas tentang hubungan antara bi-ideal prime kuat, bi-ideal prime, bi-ideal semiprime, bi-ideal tak terreduksi kuat, dan bi-ideal tak terreduksi dari semigrup. Selain itu juga akan dibahas tentang karakteristik dari semigrup yang setiap bi-idealnya prime kuat.
Kata-kata Kunci : Bi-ideal prime kuat, bi-ideal prime, bi-ideal semiprime

THE CHARACTERISTICS OF STRONGLY PRIME BI-IDEALS SEMI-GROUP

Abstract. In this paper, we introduce the strongly prime, prime, semi-prime, strongly irreducible and irreducible bi-ideals of semi-groups. We also characterize those semi-groups for which each bi-ideal is strongly prime.
Keywords : Strongly prime bi-ideals, prime bi-ideals , semiprime bi-ideals

I. PENDAHULUAN

Salah satu konsep yang dipelajari dalam struktur aljabar adalah grup. Jika aksioma eksistensi elemen identitas dan eksistensi invers terhadap operasi biner pada grup dihilangkan, maka terbentuk struktur aljabar baru yang disebut semigrup. Dalam perkembanganya, tulisan dan pembahasan tentang semigrup banyak ditemukan di dalam berbagai buku dan literatur matematika. Howie [2] mendefinisikan semigrup S sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat assosiatif. Semigrup S disebut semigrup reguler jika setiap elemennya adalah elemen reguler, yaitu $a \in S$ disebut elemen reguler jika terdapat $x \in S$ sehingga $a = axa$. Dan S disebut semigrup intra-reguler jika setiap elemennya adalah elemen intra- reguler, yaitu $a \in S$ disebut elemen intra-reguler jika terdapat $x, y \in S$ sehingga $a = xa^2y$ [1].

Sebuah elemen e didalam semigrup S disebut elemen identitas kiri jika $ea = a$, dan disebut elemen identitas kanan jika $ae = a$ untuk setiap $a \in S$. Elemen e disebut elemen identitas di S jika e adalah identitas kiri sekaligus kanan, yaitu $ae = ea = a$. Sedangkan sebuah elemen z didalam semigrup S disebut elemen nol kiri jika memenuhi $za = z$ dan disebut elemen nol kanan jika memenuhi $az = z$ untuk setiap $a \in S$. Elemen z disebut elemen nol di S jika memenuhi elemen nol kiri sekaligus kanan, yaitu $za = az = z$. Oleh karena itu kita dapat mendefinisikan S^1 dan S^0 yaitu:

Jika S adalah sebuah semigrup dan $\varnothing \neq B \subseteq S$, maka B disebut subsemigrup di S jika □a, b ∈ B, ab ∈ B.. Subsemigrup B disebut ideal kiri atau kanan di S jika $SB \subseteq B$ atau $BS \subseteq B$, dan disebut ideal di S jika B adalah ideal kiri dan kanan. Oleh karena itu jika B adalah ideal satu atau dua sisi di S, maka $bsb \in B$ untuk setiap $b \in B$ dan $s \in S$. Akan tetapi jika B adalah subsemigrup tetapi bukan ideal satu atau dua sisi maka $bsb \in B$ untuk setiap $b \in B$ dan $s \in S$ belum tentu selalu terjadi. Clifford dan Preston (1961) mendefinisikan bahwa B sebuah subsemigrup dari semigrup S disebut bi-ideal di S jika BSB B [1].

Jika S adalah semigrup, maka dapat diselidiki bahwa irisan dari beberapa bi-ideal dari semigrup S adalah himpunan kosong atau bi-ideal di S. Selain itu produk dari dua bi-ideal dari semigrup S adalah bi-ideal di S. Sedangkan bi-ideal terkecil yang dibangun oleh $\varnothing \neq A \subseteq S$ adalah $A \cup A^2 \cup ASA$ [3].

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{jika } S \text{ mempunyai elemen identitas} \\ S \cup \{1\} & \text{jika } S \text{ tidak mempunyai elemen identitas} \end{cases}$$

$$S^0 = \begin{cases} S & \text{jika } S \text{ mempunyai elemen nol} \\ S \cup \{0\} & \text{jika } S \text{ tidak mempunyai elemen nol} \end{cases}$$

Shabir dan Kanwal [4] mendefinisikan beberapa macam bi-ideal dari semigrup yaitu: suatu bi-ideal B dari semigrup S disebut bi-ideal prime jika $B_1B_2 \subseteq B$ maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$, B disebut bi-ideal prime kuat jika B_2B_1 B maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$, dan B disebut bi-ideal semiprime jika $B_1^2 \subseteq B$ maka $B_1 \subseteq B$ untuk setiap B_1, B_2 bi-ideal di S. Selanjutnya bi-ideal B dari semigrup S disebut bi-ideal tak terreduksi jika $B_1 \cap B_2 = B$ maka $B_1 = B$ atau $B_2 = B$, dan B disebut bi-ideal tak terreduksi kuat jika $B_1 \cap B_2 \subseteq B$ maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$ untuk setiap B_1, B_2 bi-ideal di S.

Berdasarkan uraian diatas perlu untuk diselidiki bagaimana hubungan antara bi-ideal prime kuat, bi-ideal prime, bi-ideal semiprime, bi-ideal tak terreduksi kuat dan bi-ideal tak terreduksi didalam sebuah semigrup S. Selain itu juga dapat diselidiki bagaimana karakteristik dari suatu semigrup yang memiliki bi-ideal yang selalu prime kuat.

Dari tulisan ini diharapkan akan dapat disimpulkan bagaimana hubungan dari bi-ideal prime kuat, bi-ideal prime, bi-ideal semiprime, bi-ideal tak terreduksi kuat dan bi-ideal tak terreduksi didalam sebuah semigrup *S*, yang pada akhirnya dapat membantu didalam menemukan ciri atau karakteristik dari semigrup yang setiap bi-idealnya prime kuat.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 2.1. Diberikan *B* adalah bi-ideal dari semigrup *S*, *B* disebut :

i. Bi-ideal prime jika $B_1B_2 \subseteq B$ maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$,
ii. Bi-ideal prime kuat jika $B_1B_2 \cap B_2B_1\ B$ maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$,
iii. Bi-ideal semiprime jika $B_1^2 \subseteq B$ maka $B_1 \subseteq B$, untuk setiap B_1, B_2 bi-ideal di *S* [4].

Berdasarkan definisi diatas dapat ditunjukkan bahwa setiap bi-ideal prime kuat adalah bi-ideal prime, tetapi bi-ideal prime belum tentu bi-ideal prime kuat. Dan setiap bi-ideal prime adalah bi-ideal semiprime, tetapi bi-ideal semiprime belum tentu bi-ideal prime. Ambil sebarang *B* adalah bi-ideal prime kuat dari semigrup *S*. Kemudian ambil sebarang B_1, B_2 bi-ideal di *S* dan memenuhi $B_1B_2 \subseteq B$, akibatnya $B_1B_2 \cap B_2B1 \subseteq B$. Karena *B* adalah bi-ideal prime kuat dari semigrup *S*, maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$. Artinya terbukti bahwa *B* adalah bi-ideal prime. Selanjutnya Ambil sebarang *B* adalah bi-ideal prime dari semigrup *S*, dan diberikan B_1 bi-ideal di *S* yang memenuhi $B_1^2 \subseteq B$. $B_1^2 \subseteq B$ artinya $B_1B_1 \subseteq B$, karena *B* adalah bi-ideal prime dari semigrup *S* maka $B_1 \subseteq B$. Artinya terbukti bahwa *B* adalah bi-ideal semiprime.

Contoh 2.2.
$S = \{ 0, a, b \}$ adalah semigrup, hasil operasinya dapat dilihat pada tabel berikut :

.	0	*a*	*b*
0	0	0	0
a	0	*a*	*a*
b	0	*b*	*b*

Berdasarkan definisi semigrup reguler dan intra-reguler, maka *S* adalah semigrup reguler dan intra-reguler. Bi-ideal di *S* adalah $\{0\}$, $\{ 0, a \}$, $\{ 0, b \}$ dan $\{ 0, a, b \}$. Semuanya adalah bi-ideal prime, sehingga semuanya juga bi-ideal semiprime. Tetapi $\{0\}$ bukan bi-ideal prime kuat sebab $\{ 0, a \}\{ 0, b \} \cap \{ 0, b \}\{ 0, a \} = \{ 0, a \} \cap \{ 0, b \} = \{0\}$, $\{0, a\} \not\subset \{0\}$ dan $\{0, b\} \not\subset \{0\}$.

Contoh 2.3.
Diberikan *S* semigrup Kroneker, artinya *S* memiliki elemen 0 dan

$$xy = \begin{cases} x & jika \quad x = y \\ 0 & jika \quad x \neq y \end{cases}$$

Diasumsikan $|S| > 2$. Oleh karena itu $x^2 = x$ untuk setiap $x \in S$, jadi *S* adalah semigrup reguler dan intra-reguler. Dapat diselidiki bahwa setiap bi-ideal di *S* adalah bi-ideal semiprime. Jika *B* adalah bi-ideal di *S* sedemikian sehingga $|S \setminus B|$ e" 2, maka *B* bukan bi-ideal prime sebab : $(B \cup \{a\})(B \cup \{b\}) = (B \cup \{a\}) \cap (B \cup \{b\}) = B$ untuk setiap $a, b \in S \setminus B$ dan jelas bahwa $(B \cup \{a\}) \not\subseteq B$ dan $(B \cup \{b\}) \not\subseteq B$. Untuk contoh yang lebih jelas $\{0\}$ bukan bi-ideal prime.

Definisi 2.4. Diberikan *B* adalah bi-ideal dari semigrup *S*. *B* disebut :

i. Bi-ideal tak terreduksi jika $B_1 \cap B_2 = B$ maka $B_1 = B$ atau $B_2 = B$,
ii. Bi-ideal tak terreduksi kuat jika $B_1 \cap B_2 \subseteq B$ maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$,

untuk setiap B_1 , B_2 bi- ideal di *S*.

Ambil sebarang *B* adalah bi-ideal tak terreduksi kuat dari semigrup *S*. Diberikan B_1, B_2 bi-ideal di *S* dan memenuhi $B_1 \cap B_2 = B$. Karena $B_1 \cap B_2 = B$ maka $B \subseteq B_1$ dan $B \subseteq B_2$. Selanjutnya karena diketahui *B* adalah bi-ideal tak terreduksi kuat maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$. Sehingga diperoleh $B_1 = B$ atau $B_2 = B$, artinya terbukti bahwa *B* adalah bi-ideal tak terreduksi. Jadi setiap bi-ideal tak terreduksi kuat adalah bi-ideal tak terreduksi, akan tetapi bi-ideal tak terreduksi belum tentu tak terreduksi kuat.

Contoh 2.5.
$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$, hasil operasinya dapat dilihat pada tabel berikut:

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	1	2	3	1	1
3	0	1	1	1	2	3
4	0	1	4	5	1	1
5	0	1	1	1	4	5

Berdasarkan tabel hasil operasi pada *S* diatas, maka bi-ideal di *S* adalah : $\{ 0 \}$, $\{ 0, 1\}$, $\{ 0, 1, 2 \}$, $\{ 0, 1, 3\}$, $\{ 0, 1, 4\}$, $\{ 0, 1, 5\}$, $\{ 0, 1, 2, 4\}$, $\{ 0, 1, 3, 5\}$, $\{ 0, 1, 2, 3\}$, $\{ 0, 1, 4, 5\}$ dan *S*. Sedangkan bi-ideal tak terreduksi yang ada di *S* adalah : $\{ 0 \}$, $\{ 0, 1, 2, 4\}$, },$\{ 0, 1, 3, 5\}$, $\{ 0, 1, 2, 3\}$, $\{ 0, 1, 4, 5\}$ dan *S*. Tetapi yang merupakan bi-ideal tak terreduksi kuat hanya $\{0\}$.

Karena bi-ideal prime adalah pasti bi-ideal semiprime dan irisan dari beberapa bi-ideal adalah bi-ideal, apakah hal ini dapat menjamin bahwa irisan dari semua bi-ideal prime merupakan bi-ideal prime juga.

Lemma 2.6. Irisan dari semua keluarga bi-ideal prime dari suatu semigrup adalah bi-ideal semiprime.

Bukti:
Bentuk : $B = \{ A_i \mid A_i$ adalah bi-ideal prime dari semigrup $S\}$

Akan ditunjukkan : $\bigcap_{A_i \in B} A_i$ adalah bi-ideal semiprime dari semigrup *S*.

Telah diketahui bahwa adalah bi-ideal dari semigrup *S*, jadi tinggal ditunjukkan bi-ideal semiprime. Ambil sebarang C bi-ideal di S sedemikian sehingga $C^2 \subseteq A_i$ untuk setiap i. Karena A_i adalah bi-ideal prime maka $C \subseteq A_i$ untuk setiap i. Oleh karena itu maka yang berarti adalah bi-ideal semiprime

Setiap bi-ideal semiprime belum tentu merupakan bi-ideal prime dan bi-ideal prime belum tentu prime kuat. Maka bi-ideal semiprime belum tentu prime kuat. Tetapi teorema berikut akan memberi pandangan tentang bagaimana hubungan bi-ideal semiprime dengan bi-ideal prime kuat.

Proposisi 2.7. Setiap bi-ideal semiprime, tak terreduksi kuat dari suatu semigrup adalah bi-ideal prime kuat.

Bukti :

Ambil sebarang B bi-ideal semiprime tak terreduksi kuat dari semigrup S. Akan ditunjukkan bahwa B bi-ideal prime kuat. Diberikan B_1, B_2 bi-ideal di S dan memenuhi $B_1B_2 \cap B_2B_1 \subseteq B$. Karena $(B_1 \cap B_2)^2 \subseteq B_1B_2$ dan $(B_1 \cap B_2)^2 \subseteq B_2B_1$ maka $(B_1 \cap B_2)^2 \subseteq B_1B_2 \cap B_2B_1 \subseteq B$. Karena B bi-ideal semiprime maka $B_1 \cap B_2 \subseteq B$, dan karena B bi-ideal tak terreduksi kuat maka $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$. Artinya terbukti bahwa B bi-ideal prime kuat

Dari Lemma 2.6 dapat disimpulkan bahwa tidak dijamin bahwa irisan dari semua keluarga bi-ideal prime adalah bi-ideal prime, akan tetapi dapat dijamin bahwa irisannya adalah bi-ideal semiprime. Sedangkan Proposisi 2.7 menunjukkan bahwa bi-ideal semiprime merupakan bi-ideal prime kuat jika bi-ideal tersebut adalah bi-ideal semiprime tak terreduksi kuat.

Proposisi 2.8. Diberikan B bi-ideal dari semigrup S dengan $a \in S$ dan $a \notin B$. Maka selalu ada suatu I bi-ideal tak terreduksi di S sehingga $B \subseteq I$ dan $a \notin I$.

Bukti :

Diberikan A adalah koleksi semua bi-ideal di S yang memuat B dan tidak memuat a. Tulis A = { A | A bi-ideal di S, $B \subseteq A$ dan $a \notin A$ }. Maka A $\neq \emptyset$ karena $B \in$ A. A adalah himpunan terurut parsial terhadap relasi inklusi $\subseteq$. Jika F $\subseteq$ A adalah himpunan terurut total, maka $\cup$F adalah Bi-ideal di S yang memuat B dan merupakan batas atas dari rantai F. Berdasarkan Lemma Zorn, maka selalu ada elemen maksimal di A, misalkan I. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa I adalah bi-ideal tak terreduksi. Diberikan C dan D bi-ideal di S yang memenuhi $C \cap D = I$. Jika $I \subseteq C$ dan $I \subseteq D$ maka $a \in C$ dan $a \in D$ artinya $a \in C \cap D = I$, hal ini tidak mungkin terjadi karena kontradiksi dengan yang diketahui $a \notin I$. Jadi yang seharusnya adalah $C = I$ atau $D = I$. Terbukti bahwa I adalah bi-ideal tak terreduksi.

Teorema 2.9. Jika S adalah suatu semigrup maka pernyataan-pernyataan berikut equivalen :

i. $B^2 = B$ untuk setiap B bi-ideal di S.

ii. S reguler dan intra-reguler.

iii. $B_1 \cap B_2 = B_1B_2 \cap B_2B_1$ untuk setiap B_1, B_2 bi-ideal di S.

iv. Setiap bi-ideal di S adalah bi-ideal semiprime.

v. Setiap bi-ideal sejati di S adalah irisan dari bi-ideal semiprime tak terreduksi di S yang memuat dirinya.

Bukti :

a. (i $\Rightarrow$ ii) Diketahui $B^2 = B$ untuk setiap B bi-ideal di S, akan ditunjukkan S reguler dan intra-reguler. Ambil sebarang B bi-ideal di S, dari yang diketahui maka $B = BBB \subseteq BSB$. Oleh karena B adalah bi-ideal maka $BSB \subseteq B$, jadi $BSB = B$ untuk setiap B bi-ideal di S, S reguler. Selanjutnya akan ditunjukkan S intra-reguler. Ambil sebarang $a \in S$, karena telah terbukti bahwa S reguler maka aS dan Sa masing-masing adalah ideal kanan dan kiri di S yang memuat a, artinya $a \in aS$ dan $a \in Sa$. Akibatnya $a \in (Sa)(aS) \subseteq Sa^2S$ yang berarti S intra-reguler.

b. (ii iii) Diketahui S reguler dan intra-reguler. Akan ditunjukkan $B_1 \cap B_2 = B_1B_2 \cap B_2B_1$ untuk setiap B_1, B_2 bi-ideal di S. Jelas bahwa $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1B_2$ dan $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2B_1$, yang berarti $B_1 \cap B_2 \subseteq B_1B_2 \cap B_2B_1$ untuk setiap B_1, B_2 bi-ideal di S. Karena diketahui S reguler, maka:

$B_1B_2 \cap B_2B_1 \subseteq (B_1B_2)(B_2B_1) \subseteq B_1SB_1 = B_1$ dan $B_1B_2 \cap B_2B_1 \subseteq (B_2B_1)(B_1B_2) \subseteq B_2SB_2 = B_2$.

Jadi $B_1B_2 \cap B_2B_1 \subseteq B_1 \cap B_2$. Karena dan $B_1B_2 \cap B_2B_1 \subseteq B_1 \cap B_2$, maka terbukti $B_1 \cap B_2 = B_1B_2 \cap B_2B_1$ untuk setiap B_1, B_2 bi-ideal di S.

c. (iii $\Rightarrow$ iv) Diberikan B dan B_1 bi-ideal di S yang memenuhi $B_1^2 \subseteq B$. Berdasarkan hipotesis (iii) maka $B_1 = B_1 \cap B_1 = B_1B_1 \cap B_1B_1 = B_1^2$. Jadi diperoleh $B_1 \subseteq B$, artinya B adalah bi-ideal semiprime.

d. (iv v) Diberikan B bi-ideal sejati di S. Maka menurut Proposisi 2.8 dijamin selalu ada B_α bi-ideal tak terreduksi di S sehingga $B \subseteq B_\alpha$. Jika $a \notin B$ maka selalu ada B_i bi-ideal tak terreduksi di S untuk suatu $i \in \alpha$ sedemikian sehingga $B \subseteq B_i$. Oleh karena itu maka .

Karena diketahui dari hipotesis (iv) maka B_i adalah bi-ideal semiprime tak terreduksi untuk setiap $i \in \alpha$.

e. (v $\Rightarrow$ i) Diberikan B bi-ideal di S.

Jika $B^2 = S$ maka B idempoten yaitu $B = B^2$, sebab : Jelas bahwa $B^2 \subseteq B$, karena $B^2 = S$ maka $S \subseteq B$ artinya $S \subset B$ atau $S = B$. Selanjutnya karena B bi-ideal di S maka $S \subset B$ tidak mungkin terjadi, jadi $S = B$ atau terbukti jika $B^2 = S$ maka B idempoten yaitu $B^2 = B$.

Jika $B^2 \neq S$, artinya B^2 adalah bi-ideal sejati di S. Dari hipotesis (v) maka :

B^2 =; B_i adalah bi-ideal semiprime tak terreduksi di S dan $B^2 \subseteq B_i$ untuk setiap $i \in \alpha$. Selanjutnya karena B_i adalah bi-ideal semiprime maka $B \subseteq B_i$ untuk setiap $i \in \alpha$ yang berarti B $\subseteq$= B^2. Kita mengetahui jelas bahwa $B^2 \subseteq B$, jadi terbukti $B^2 = B$ atau setiap bi-ideal di S idempoten.

Dari Teorema 2.9 diketahui bahwa setiap bi-ideal dari semigrup S semiprime jika S reguler dan intra-reguler. Artinya suatu semigrup S memiliki bi-ideal yang selalu semiprime jika dan hanya jika S adalah semigrup reguler dan intra-reguler. Lalu bagaimana dengan Semigrup yang memiliki bi-ideal yang selalu prime kuat ?.

Teorema 2.10. Setiap bi-ideal pada semigrup S prime kuat jika dan hanya jika S semigrup reguler, intra-reguler dan himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total terhadap relasi inklusi ($\subseteq$).

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui setiap bi-ideal di S prime kuat, maka setiap bi-ideal di S semiprime. Berdasarkan Teorema 2.9, maka S adalah reguler dan intra-reguler. Selanjutnya tinggal ditunjukkan bahwa himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total terhadap relasi inklusi. Artinya akan ditunjukkan $B_1 \subseteq B_2$ atau $B_2 \subseteq B_1$ untuk sebarang B_1, B_2 bi-ideal di S.

Diberikan B_1, B_2 bi-ideal di S, karena S adalah reguler dan intra-reguler maka menurut Teorema 2.9 $B_1B_2 \cap B_2B_1 = B_1 \cap B_2$. Karena diketahui setiap bi-ideal di S prime kuat, maka $B_1 \cap B_2$ bi-ideal prime kuat. Jadi $B_1 \subseteq B_1 \cap B_2$ atau $B_2 \subseteq B_1 \cap B_2$. Jika $B_1 \subseteq B_1 \cap B_2$ maka $B_1 \subseteq B_2$, sedangkan jika $B_2 \subseteq B_1 \cap B_2$ maka $B_2 \subseteq B_1$. Jadi terbukti bahwa $B_1 \subseteq B_2$ atau $B_2 \subseteq B_1$ yang berarti himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total terhadap relasi inklusi.

($\Leftarrow$) Diketahui S semigrup reguler, intra-reguler dan himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total terhadap relasi inklusi. Akan ditunjukkan setiap bi-ideal di S adalah bi-ideal prime kuat.

Ambil sebarang B bi-ideal di S. Diberikan B_1, B_2 bi-ideal di S yang memenuhi $B_1B_2 \cap B_2B_1 \subseteq B$. Karena S semigrup reguler dan intra-reguler maka berdasarkan Teorema 2.9 $B_1B_2 \cap B_2B_1 = B_1 \cap B_2$, jadi $B_1 \cap B_2 \subseteq B$. Karena himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total terhadap relasi inklusi, maka $B_1 \subseteq B_2$ atau $B_2 \subseteq B_1$. Akibatnya $B_1 \cap B_2 = B_1$ atau $B_1 \cap B_2 = B_2$. Oleh karena itu diperoleh $B_1 \subseteq B$ atau $B_2 \subseteq B$ yang artinya terbukti bahwa B bi-ideal prime kuat.

Jadi karakteristik dari semigrup yang setiap bi-idealnya adalah bi-ideal prime kuat adalah semigrup reguler, intra-reguler dan himpunan bi-idealnya adalah himpunan terurut total terhadap relasi inklusi. Karena setiap bi-ideal prime kuat adalah bi-ideal prime maka semigrup reguler dan intra-reguler memiliki bi-ideal yang semuanya merupakan bi-ideal prime jika himpunan bi-idealnya adalah himpunan terurut total.

Teorema 2.11. Jika himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total, maka S adalah semigrup reguler dan intra-reguler jika dan hanya jika setiap bi-ideal di S adalah bi-ideal prime.

Bukti :

($\Rightarrow$) Diketahui S adalah semigrup reguler dan intra-reguler, dan himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total. Akan ditunjukkan setiap bi-ideal di S adalah bi-ideal prime.

Ambil sebarang B bi-ideal di S. Diberikan B_1, B_2 bi-ideal di S yang memenuhi $B_1B_2 \subseteq B$. Karena himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total maka $B_1 \subseteq B_2$ atau $B_2 \subseteq B_1$. Misalkan $B_1 \subseteq B_2$ maka $B_1^2 \subseteq B_1B_2 \subseteq B$. Karena diketahui S adalah semigrup reguler dan intra-reguler maka menurut Teorema 2.9 B adalah bi-ideal semiprime sehingga $B_1 \subseteq B$. Jadi terbukti B adalah bi-ideal prime.

($\Leftarrow$) Diketahui setiap bi-ideal di S prime. Akan ditunjukkan S adalah semigrup reguler dan intra-reguler.

Diketahui setiap bi-ideal di S prime, dan himpunan bi-ideal di S adalah himpunan terurut total. Oleh karena setiap bi-ideal prime adalah bi-ideal semiprime, maka menurut Teorema 2.9 terbukti bahwa S adalah semigrup reguler dan intra-reguler.

III. KESIMPULAN DAN SARAN

3.1. Kesimpulan

Dari uraian pada pembahasan diatas, dapat ditarik beberapa kesimpulan yaitu:

1. Setiap bi-ideal prime kuat adalah bi-ideal prime, tetapi bi-ideal prime belum tentu bi-ideal prime kuat.
2. Setiap bi-ideal prime adalah bi-ideal semiprime, tetapi bi-ideal semiprime belum tentu bi-ideal prime.
3. Setiap bi-ideal tak terreduksi kuat adalah bi-ideal tak terreduksi, tetapi bi-ideal tak terreduksi belum tentu tak terreduksi kuat.
4. Setiap bi-ideal semiprime merupakan bi-ideal prime kuat jika bi-ideal tersebut adalah bi-ideal semiprime tak terreduksi kuat.
5. Karakteristik dari semigrup yang setiap bi-idealnya adalah bi-ideal prime kuat adalah semigrup reguler, intra-reguler dan himpunan bi-idealnya adalah himpunan terurut total terhadap relasi inklusi.

3.2. Saran

Dari kesimpulan 4 kita melihat adanya hubungan antara bi-ideal semiprime, bi-ideal prime kuat, dan bi-ideal tak terreduksi kuat. Oleh karena itu untuk penelitian lebih lanjut dapat diselidiki bagaimana karakteristik dari semigrup yang memiliki bi-ideal yang selalu tak terreduksi kuat.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Clifford, A.H. and Preston, G.B,1961 " The Algebraic Theory of Semigroups " vol. 1 A.M.S. Survey no. 7.

[2] Howie, J.M, 1976 "An Introduction to Semigroup Theory " Academic press, London.

[3] Lajos, S, 1971 " On the Bi-ideal in Semigroups II " Proc. Japan Acad, vol. 47, 837-839.

[4] Shabir, M. and Nayla kanwal, 2007 " Prime Bi-ideal of Semigroups " Southest Asian Bulletin of Mathematics vol. 31, 757-764.