J. Pijar MIPA, Vol. X No.1, Maret 2015: 76-79 ISSN 1907-1744 (Cetak)
ISSN 2410-1500 (Online)

PERUMUMAN LEMMA SNAKE DAN LEMMA LIMA

Sripatmi[1], Yunita Septriana Anwar[2]

[1]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mataram
[2]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Muhammadiyah Mataram
Email: spatmi@gmail.com, na2_math@yahoo.com

Abstrak. Barisan U-eksak merupakan perumuman dari barisan eksak yang diperkenalkan oleh Davvaz dan Parnian-Garamaleky. Dalam tulisan ini akan dikaji perumuman dari Lemma Snake dan Lemma Lima yang memanfaatkan sifat-sifat dari barisan U-eksak.

Kata Kunci : Barisan U-eksak, Lemma Snake, Lemma Lima

Abstract. U-exact sequences was introduced by Davvaz dan Parnian-Garamaleky as a generalization of exact sequences. In this paper, we give some characterizations and properties of U-exact sequences. We use these result to find a generalization of Snake Lemma and Five Lemma.

Key words Kunci : U-exact sequences, Snake Lemma, Five Lemma

PENDAHULUAN

Diasumsikan R adalah ring asosiatif dengan elemen identitas dan semua R-modul adalah R-modul unital. Barisan $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ disebut barisan eksak pendek jika $Im\, f = \ker(g)$. Barisan $0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{pq} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_q \to 0$ merupakan salah satu contoh barisan eksak pendek. Secara umum barisan R-modul dan R-homomorfisma $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ disebut eksak di M_i jika $\mathrm{Im}\,(f_i) = ker(f_{i+1})$ atau $\mathrm{Im}\,(f_i) = f_{i+1}^{-1}(\{0\})$. Apabila sebarang submodul U_{i-1} dari M_{i-1} disubstitusikan pada submodul $\{0\}$, Davvaz dan Parnian- Garamaleky pada tahun 1999 memperkenalkan konsep dari barisan U-eksak yang memperumum definsi barisan eksak. Konsep barisan U-eksak banyak digunakan secara luas dalam Teori Ring dan Modul, Teori Grup, Teori Homologi, Aljabar Topologi, dan Teori Kompleks.

Barisan R-modul dan R-homomorfisma $\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ disebut U_{i+1}-eksak di M_i jika $\mathrm{Im}\,(f_i) = f_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$. Dari definisi ini diperoleh bahwa barisan eksak pendek $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ merupakan barisan $\{0\}$-eksak di A, U-eksak di B, dan $\{0\}$-eksak di C, atau sederhananya disebut U-eksak. Akibat lain yang diperoleh dari definisi barisan U-eksak adalah barisan $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ adalah U-eksak jika dan hanya jika f injektif, g surjektif, dan $\mathrm{Im}(f) = g^{-1}(U)$. Misalnya barisan $0 \to 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \to 0$ merupakan barisan $\mathbb{Z}_4$-eksak.

Jika M adalah R-modul dan U adalah submodul dari M, maka barisan $0 \to U \xrightarrow{\subseteq} M \xrightarrow{i} M \to 0$ adalah barisan U-eksak. Selanjutnya, jika U dan V adalah submodul-submodul dari M sedemikian hingga $V \subseteq U \subseteq M$, maka barisan $0 \to U \xrightarrow{\subseteq} M \xrightarrow{\pi} M/V \to 0$ adalah barisan U/V-eksak dimana π adalah homomorfisma natural. Barisan U-eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ disebut eksak jika dan hanya jika $U = \{0\}$ sehingga barisan U-eksak merupakan perumuman dari barisan eksak.
Dalam tulisan ini diawali dengan definisi dan karakterisasi dari barisan U-eksak. Selanjutnya dikaji perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima yang memanfaatkan karakterisasi dari barisan U-eksak. Karakterisasi dari barisan U-eksak diambil dari [2], pembuktian Lemma Snake dan Lemma Lima dapat dilihat di [1] dan [5], sedangkan perumuman Lemma Snake dan Lemma Lima merujuk pada [3] dan [4].

PEMBAHASAN

Definisi 1. Barisan dari dari R-modul dan R-homomorfisma

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

disebut barisan U_{i+1}-eksak di M_i jika $\mathrm{Im}\,(f_i) = f_{i+1}^{-1}(U_{i+1})$, dimana U_{i+1} adalah submodul dari M_{i+1}.

Definisi 2. Barisan U-eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ isomorfis dengan barisan U'-eksak $0 \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to 0$ jika terdapat diagram komutatif dari R-homomorfisma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

 ISSN 1907-1744 (Cetak)
ISSN 2410-1500 (Online)

sedemikian hingga α, β, dan γ adalah isomorfisma.

Teorema 3. Isomorfisma dari barisan U-eksak merupakan relasi ekuivalen.

Bukti. Harus ditunjukkan isomorfisma dari barisan U-eksak dan U'-eksak merupakan relasi refleksif, simetris, dan transitif. Dengan mengambil $\alpha, \beta,$ dan γ berupa pemetaan identitas, jelas α, β, dan γ merupakan ismorfisma. Sehingga diperoleh ismorfisma dari barisan U-eksak memenuhi sifat refleksif. Selanjutnya, misalkan barisan U-eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ isomorfis dengan barisan U'-eksak $0 \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to 0$, maka terdapat diagram komutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sedemikian hingga α, β, dan γ adalah isomorfisma. Karena α, β, dan γ adalah isomorfisma, maka terdapat α^{-1}, β^{-1}, dan γ^{-1} yang juga adalah isomorfisma. Sehingga barisan U'-eksak $0 \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to 0$ isomorfis dengan barisan U-eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ atau ismorfisma dari barisan U-eksak memenuhi sifat simetris. Tinggal ditunjukkan ismorfisma dari barisan U-eksak memenuhi sifat transitif. Misalkan misalkan barisan U-eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ isomorfis dengan barisan U'-eksak $0 \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to 0$ dan barisan U'-eksak $0 \to A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \to 0$ isomorfis dengan barisan U''-eksak $0 \to A'' \xrightarrow{f''} B'' \xrightarrow{g''} C'' \to 0$ sehingga terdapat diagram komutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "\beta'"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r, "f''"'] & B'' \arrow[r, "g''"'] & C'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sedemikian hingga α, β, γ, α', β', dan γ' adalah isomorfisma. Dengan memilih $\alpha \circ \alpha'$, $\beta \circ \beta'$, dan $\gamma \circ \gamma'$ yang juga merupakan isomorfisma, diperoleh barisan U-eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ isomorfis dengan barisan U''-eksak $0 \to A'' \xrightarrow{f''} B'' \xrightarrow{g''} C'' \to 0$. Sehingga ismorfisma dari barisan U-eksak memenuhi sifat transitif.

Teorema 4. Jika barisan U-eksak dan U'-eksak isomorfis, maka $U \cong U'$.

Bukti. Diberikan barisan U-eksak dan U'-eksak isomorfis, maka terdapat diagram komutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sedemikian hingga α, β, dan γ adalah isomorfisma. Untuk menunjukkan $U \cong U'$, cukup ditunjukkan $\gamma(U) = U'$. Ambil sebarang $x \in \gamma(U)$, sehingga terdapat $u \in U$ sehingga $x = \gamma(u)$. Karena $u \in U$ dan baris pertama merupakan barisan U-eksak, maka $g^{-1}(u) \subseteq g^{-1}(U) = \operatorname{Im} f$ sehingga $gg^{-1}(u) \subseteq gf(A)$. Akibatnya, $u \in gf(A)$, yaitu terdapat $a_0 \in A$ sedemikian hingga $u = gf(a_0)$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} x &= \gamma(u) = \gamma\big(gf(a_0)\big) = (\gamma g)f(a_0) = (g'\beta)f(a_0) = g'(\beta f)(a_0) \\ &= g'(f'\alpha)(a_0) = (g'f')\big(\alpha(a_0)\big) \end{aligned}$$

Akibatnya, $x \in g'f'(A') \subseteq U'$ atau $\gamma(U) \subseteq U'$. Selanjutnya, ambil $y \in U'$. Karena g' epimorfisma, maka terdapat $b \in B'$ sehingga $g'(b) = y$ atau $b = g'^{-1}(y)$. Mengingat baris kedua merupakan barisan U'-eksak, yaitu $\operatorname{Im} f' = g'^{-1}(U')$, maka terdapat $a \in A$ sehingga $b = f'(a)$. Karena γ dan β adalah isomorfisma, maka $y = g'(b) = g'f'(a) = g'\,\gamma^{-1}g'\big(f'(a)\big) =$. Sehingga $y = \gamma\big(g\beta^{-1}(b)\big) = (\gamma g)\big(\beta^{-1}(b)\big) = g'\beta\big(\beta^{-1}(b)\big) = g'(b)$.

Lemma 5 (Lemma Lima). Diberikan diagram komutatif dari R-modul homomorfisma berikut dimana setiap baris merupakan barisan eksak:

$$\begin{tikzcd}
A_5 \arrow[r, "f_5"] \arrow[d, "\alpha_5"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\alpha_4"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\
B_5 \arrow[r, "g_5"'] & B_4 \arrow[r, "g_4"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_1
\end{tikzcd}$$

ISSN 1907-1744 (Cetak)
ISSN 2410-1500 (Online)

(i) Jika α_2, α_4 adalah monomorfisma dan α_5 epimorfisma, maka α_3 adalah monomorfisma.

(ii) Jika α_2, α_4 adalah epimorfisma dan α_1 adalah monomorfisma, maka α_3 adalah epimorfisma.

(iii) Jika α_5 adalah epimorfisma, α_1 monomorfisma, α_2, α_4 adalah isomorfisma, maka α_3 juga isomorfisma.

Lemma 6 (Perumuman Lemma Lima). Diberikan diagram komutatif dari R-modul homomorfisma berikut dengan baris pertama adalah U-eksak di A_2, V-eksak di A_3 dan $\{0\}$-eksak di A_4, dan baris kedua adalah $\{0\}$-eksak di B_2, U'-eksak di B_3 dan V'-eksak di B_4 :

$$\begin{tikzcd}
A_5 \arrow[r, "f_5"] \arrow[d, "\alpha_5"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\alpha_4"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\
B_5 \arrow[r, "g_5"'] & B_4 \arrow[r, "g_4"'] & B_3 \arrow[r, "g_3"'] & B_2 \arrow[r, "g_2"'] & B_1
\end{tikzcd}$$

(iv) Jika α_2, α_4 adalah monomorfisma dan α_5 epimorfisma, maka α_3 adalah monomorfisma.

(v) Jika α_2, α_4 adalah epimorfisma dan α_1 adalah monomorfisma, maka α_3 adalah epimorfisma.

(vi) Jika α_1, α_2, α_4, α_5 adalah isomorfisma, maka α_3 juga isomorfisma.

Bukti.

(i) Akan ditunjukkan α_3 adalah monomorfisma. Ambil $x \in \text{Ker}\, \alpha_3$. Berarti $\alpha_3(x) = 0$. Karena $0 = g_3\alpha_3(x) = \alpha_2 f_3(x)$, maka $f_3(x) \in \text{Ker}\, \alpha_2 = 0$. Akibatnya, $x \in \text{Ker}\, f_3 \subseteq {f_3}^{-1}(U) = \text{Im}\, f_4$. Sehingga, terdapat $y \in A_4$ sedemikian hingga $f_4(y) = x$. Perhatikan bahwa : $0 = \alpha_3(x) = \alpha_3 f_4(y) = g_4\alpha_4(y)$. Akibatnya, $\alpha_4(y) \in \text{Ker}\, g_4 \subseteq {g_4}^{-1}(U') = \text{Im}\, g_5$. Berarti terdapat $z \in B_5$ sehingga $g_5(z) = \alpha_4(y)$. Mengingat α_5 epimorfisma, maka terdapat $w \in A_5$ sehingga $\alpha_5(w) = z$. Selanjutnya, $\alpha_4(y) = g_5(z) = g_5\alpha_5(w) = \alpha_4 f_5(w)$ atau $\alpha_4\big(y - f_5(w)\big) = 0$. Karena α_4 monomorfisma, maka $y - f_5(w) = 0$ atau $y = f_5(w)$. Dengan memanfaatkan $\{0\}$-eksak pada A_4 diperoleh $x = f_4(y) = f_4 f_5(w) = 0$. Dengan demikian α_3 adalah monomorfisma.

(ii) Akan ditunjukkan α_3 adalah epimorfisma. Ambil sebarang $x \in B_3$, maka dimiliki $g_3(x) \in B_2$. Karena α_2 epimorfisma, maka terdapat $y \in A_2$ sehingga $\alpha_2(y) = g_3(x)$. Mengingat baris kedua $\{0\}$-eksak di B_2, diperoleh $0 = g_2 g_3(x) = g_2\alpha_2(y) = \alpha_1 f_2(y)$. Sehingga, $f_2(y) \in \text{Ker}\, \alpha_1 = 0$. Akibatnya, $y \in \text{Ker}\, f_2 \subseteq {f_2}^{-1}(U) = \text{Im}\, f_3$, yaitu terdapat $z \in A_3$ sedemikian hingga $f_3(z) = y$. Selanjutnya, $\alpha_2(y) = \alpha_2 f_3(z) = g_3\alpha_3(z) = g_3(x)$ karena $\alpha_2(y) = g_3(x)$. Sehingga, $g_3(\alpha_3(z) - x) = 0$ atau $\alpha_3(z) - x \in \text{Ker}\, g_3 \subseteq {g_3}^{-1}(U') = \text{Im}\, g_4$, yaitu terdapat $a \in B_4$ sedemikian hingga $\alpha_3(z) - x = g_4(a)$. Dilain pihak, α_4 adalah epimorfisma, yaitu terdapat $b \in A_4$ sehingga $\alpha_4(b) = a$. Selanjutnya, $g_4(a) = g_4\alpha_4(b) = \alpha_3 f_4(b) = \alpha_3(z) - x$ karena $\alpha_3(z) - x = g_4(a)$. Akibatnya, $\alpha_3(f_4(b) - z) = x$, yaitu α_3 adalah epimorfisma.

Dengan memanfaatkan (i) dan (ii) diperoleh langsung α_3 juga isomorfisma.

Lemma 8 (Perumuman Lemma Snake). Misalkan

$$\begin{tikzcd}
& A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C &
\end{tikzcd}$$

adalah diagram komutatif sedemikian hingga

(1) Baris pertama adalah U'-eksak dan baris kedua adalah U-eksak.

(2) $W \subseteq \text{Im}\, \alpha$

(3) $U \subseteq \text{Im}\, \gamma$

(4) $g(V) \subseteq U,\ f(W) = V$

(5) $U' \subseteq \gamma^{-1}(U)$

Maka terdapat homomorfisma $\omega : \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \longrightarrow \text{Coker}\, \alpha$ sedemikian hingga barisan :

$$\alpha^{-1}(W) \overset{f'_*}{\to} \beta^{-1}(V) \overset{g'_*}{\to} \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \overset{\omega}{\to} \text{Coker}\, \alpha \overset{f'_*}{\to} \text{Coker}\, \beta \overset{g'_*}{\to} \text{Coker}\, \gamma$$

eksak.

Bukti. Ambil $x \in g'\big(\beta^{-1}(V)\big)$, maka terdapat $y \in V$ sedemikian hingga $g'\big(\beta^{-1}(y)\big) = x$. Karena $y \in V$ maka $g(y) \in C$, dan $g(V) \subseteq U$ mengakibatkan $g(y) \in U$. Sehingga $\gamma^{-1}\big(g(y)\big) \in \gamma^{-1}(U)$. Akibatnya $g'\big(\beta^{-1}(y)\big) = \gamma^{-1}\big(g(y)\big) \in \gamma^{-1}(U)$. Sehingga $g'\big(\beta^{-1}(V)\big) \subseteq \gamma^{-1}(U)$. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan $f'\big(\alpha^{-1}(W)\big) \subseteq \beta^{-1}(V)$. Akibatnya terbentuk barisan:

$$\alpha^{-1}(W) \xrightarrow{f'|_{\alpha^{-1}(W)}} \beta^{-1}(V) \xrightarrow{g'|_{\beta^{-1}(V)}} \gamma^{-1}(U)$$

Dibentuk homomorfisma kanonik $\pi : \gamma^{-1}(U) \longrightarrow \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$. Misalkan $f'_* = f'|_{\alpha^{-1}(W)}$ dan $g'_* = \pi g'|_{\beta^{-1}(V)}$ sehingga diperoleh barisan:

(I) $\alpha^{-1}(W) \xrightarrow{f'_*} \beta^{-1}(V) \xrightarrow{g'_*} \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$

Dilain pihak, dari f dan g dapat dibentuk homomorfisma $f^* : \frac{A}{Im\,\alpha} \longrightarrow \frac{B}{Im\,\beta}$ dengan $f^*(a + Im\,\alpha) = f(a) + Im\,\beta$, dan $g^* : \frac{B}{Im\,\beta} \longrightarrow \frac{C}{Im\,\gamma}$ dengan $g^*(b + Im\,\beta) = g(b) + Im\,\gamma$. Sehingga diperoleh barisan:

(II)

$Coker\,\alpha \xrightarrow{f^*} Coker\,\beta \xrightarrow{g^*} Coker\,\gamma$

Selanjutnya akan ditunjukkan terdapatnya homomorfisma $\omega : \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \longrightarrow$ Coker α yang menghubungkan barisan (I) dan (II). Misalkan $z + U' \in \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$. Pilih $b' \in B'$ sehingga $g'(b') = z$. Karena $g\beta(b') = \gamma g'(b') = \gamma(z) \in U$, maka $\beta(b') \in g^{-1}(U)$. Mengingat barisan (II) eksak, maka $\beta(b') \in Im\,f$. Akibatnya terdapat dengan tunggal $a \in A$ sedemikian hingga $\beta(b') = f(a)$ dan $a = f^{-1}\beta(b')$. Didefinisikan $\omega(z + U') = a + Im\,\alpha$. Misalkan $b'' \in B'$ dengan $g'(b'') = z$, maka terdapat $a' \in A$ sedemikian hingga $\beta(b'') = f(a')$. Dari $g'(b') = z$ dan $g'(b'') = z$, diperoleh $g'(b' - b'') = 0$. Akibatnya $b' - b'' \in$ Ker $g' \subseteq {g'}^{-1}(U') = Im\,f'$, sehingga terdapat $\bar{a} \in A'$ dengan $b' - b'' = f'(\bar{a})$. Karena $\beta f'(\bar{a}) = f\alpha(\bar{a})$, diperoleh $\beta(b - b'') = f\alpha(\bar{a})$ yang berakibat $f(a - a') = f\alpha(\bar{a})$. Mengingat f monomorfisma, maka $a - a' = \alpha(\bar{a}) \in Im\,\alpha$. Akibatnya $a + Im\,\alpha = a' + Im\,\alpha$, yaitu ω terdefinisi dengan baik. Tinggal ditunjukkan keeksakan

$$\alpha^{-1}(W) \xrightarrow{f'_*} \beta^{-1}(V) \xrightarrow{g'_*} \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \xrightarrow{\omega} \text{Coker}\,\alpha \xrightarrow{f'_*} \text{Coker}\,\beta \xrightarrow{g'_*} \text{Coker}\,\gamma$$

Langkah 1 : Akan ditunjukkan $Im\,f'_* =$ Ker g'_*. Ambil $b' \in$ Ker g'_*. Berarti $g'_*(b') = 0 + U'$ sehingga diperoleh $g'(b') \in U'$. Akibatnya $b' \in {g'}^{-1}(U')$. Karena baris (I) eksak, terdapat $x \in A'$ sehingga $b' = f'(x)$. Karena $f'_* = f'|_{\alpha^{-1}(W)}$, tinggal ditunjukkan $x \in \alpha^{-1}(W)$. Perhatikan bahwa: $f\alpha(x) = \beta f'(x) = \beta(b')$. Karena $b' \in \beta^{-1}(V)$, maka $\beta(b') \in V$. Akibatnya $f\alpha(x) \in V$. Dilain pihak $f(W) = V$ dan f monomorfisma, maka $\alpha(x) \in W$ atau $x \in \alpha^{-1}(W)$. Akibatnya Ker $g'_* \subseteq Im\,f'_*$. Selanjutnya, ambil $a \in Im\,f'_*$ berarti terdapat $x \in \alpha^{-1}(W)$ sehingga $f'_*(x) = a$ atau $f'|_{\alpha^{-1}(W)} = a$, $f'(x) = a$. Akibatnya $a \in Im\,f' = {g'}^{-1}(U')$, yaitu $g'(a) \in U'$. Sehingga $Im\,f'_* \subseteq$ Ker g'_*, dengan kata lain $Im\,f'_* =$ Ker g'_*.

Langkah 2 : $Im\,g'_* =$ Ker ω.

Ambil $x \in Im\,g'_*$ terdapat $b' \in \beta^{-1}(V)$ sehingga $g'(b') + U' = x$. Selanjutnya $\omega(x) = \omega(g'(b') + U') = f^{-1}\beta\left({g'}^{-1}\left(g'(b')\right)\right) + Im\,\alpha = f^{-1}\beta(b') + Im\,\alpha$. Karena $b' \in \beta^{-1}(V)$ maka $\beta(b') \in V$. Mengingat $f(W) = V$ dan f monomorfisma maka $f^{-1}\beta(b') \in W \subseteq Im\,\alpha$. Akibatnya $\omega(x) \in Im\,\alpha$ sehingga $x \in$ Ker ω. Jadi $Im\,g'_* \subseteq$ Ker ω. Ambil $y = c' + U' \in$ Ker ω dengan $c' \in \gamma^{-1}(U)$ berarti $\omega(c' + U') = Im\,\alpha$ atau $f^{-1}\beta\left({g'}^{-1}(c')\right) + Im\,\alpha \in Im\,\alpha$. Sehingga terdapat $x \in A'$ sedemikian hingga $\beta\left({g'}^{-1}(c')\right) = f\alpha(x) = \beta f'(x)$.

Akibatnya $\beta\left({g'}^{-1}(c') - f'(x)\right) = 0$ yaitu ${g'}^{-1}(c') - f'(x) \in$ Ker β $\subseteq \beta^{-1}(V)$. Sehingga $g'_*\left({g'}^{-1}(c') - f'(x)\right) = \pi g'\left({g'}^{-1}(c') - f'(x)\right) = g'\left({g'}^{-1}(c') - f'(x)\right) + U' = c' + U' = y$. Akibatnya Ker $\omega \subseteq Im\,g'_*$. Dengan demikian $Im\,g'_* =$ Ker ω.

Langkah 3 : $Im\,\omega =$ Ker f^*.

Ambil $x \in Im\,\omega$ yaitu terdapat $c' + U' \in \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'}$ sehingga $\omega(c' + U') = x$. Perhatikan bahwa: $f^{-1}\beta\left({g'}^{-1}(c')\right) + Im\,\alpha = x$,
$f^*\left[f^{-1}\beta\left({g'}^{-1}(c')\right) + Im\,\alpha\right] = f^*[x]$,
$\beta\left({g'}^{-1}(c')\right) + Im\,\beta = f^*(x)$. Sehingga $x \in$ Ker f^* atau $Im\,\omega \subseteq$ Ker f^*. Selanjutnya misalkan $y = a + Im\,\alpha \in$ Ker f^* berarti $f^*(a + Im\,\alpha) = Im\,\beta$ atau $f(a) + Im\,\beta = Im\,\beta$, sehingga $f(a) \in Im\,\beta$. Akibatnya terdapat $b' \in B'$ sedemikian hingga $\beta(b') = f(a)$. Mengingat $g\beta = \gamma g'$ diperoleh $\gamma g'(b') \in U$. Akibatnya, $g'(b') \in \gamma^{-1}(U)$ sehingga $\omega(g'(b') + U') = f^{-1}\beta(b') + Im\,\alpha = a + Im\,\alpha = y$. Diperoleh Ker $f^* \subseteq Im\,\omega$ sehingga Ker $f^* = Im\,\omega$.

Langkah 4 : $Im\,f^* =$ Ker g^*.

Misalkan $f^*(a + Im\,\alpha) \in Im\,f^*$, maka $g^*f^*(a + Im\,\alpha) = gf(a) + Im\,\gamma$. Karena $gf(a) \in U \subseteq Im\,\gamma$ maka $g^*f^*(a + Im\,\alpha) \in Im\,\gamma$. Akibatnya $f^*(a + Im\,\alpha) \in$ Ker g^*, yaitu $Im\,f^* \subseteq$ Ker g^*. Selanjutnya ambil $b + Im\,\beta \in$ Ker g^*, berarti $g^*(b + Im\,\beta) = g(b) + Im\,\gamma \in Im\,\gamma$. Sehingga terdapat $c' \in C'$ sedemikian hingga $g(b) = \gamma(c')$. Karena g' epimorfisma, maka $g(b) = \gamma g'(b') = g\beta(b')$. Ini berakibat $g\left(b - \beta(b')\right) = 0$ atau $b - \beta(b') \in$ Ker $g \subseteq g^{-1}(U) = Im\,f$. Sehingga terdapat $a \in A$ sedemikian hingga $b + Im\,\beta = f(a) + Im\,\beta = f^*(a + Im\,\alpha)$, yaitu Ker $g^* \subseteq Im\,f^*$. Dengan demikian $Im\,f^* =$ Ker g^*.

Akibat 9. Misalkan

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha"'] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C & \end{tikzcd}$$

ISSN 1907-1744 (Cetak)
ISSN 2410-1500 (Online)

adalah diagram komutatif sedemikian hingga

(1) Baris pertama adalah U'-eksak dan baris kedua adalah U-eksak.

(2) $U' \subseteq \gamma^{-1}(U)$ dan $U \subseteq \mathrm{Im}\,\gamma$.

Maka barisan :

$$\mathrm{Ker}\,\alpha \overset{f_*'}{\rightarrow} \mathrm{Ker}\,\beta \overset{g_*'}{\rightarrow} \frac{\gamma^{-1}(U)}{U'} \overset{\omega}{\rightarrow} \mathrm{Coker}\,\alpha \overset{f_*'}{\rightarrow} \mathrm{Coker}\,\beta \overset{g_*'}{\rightarrow} \mathrm{Coker}\,\gamma$$

eksak.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anderson, F.W. and Fuller, K.R., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, Inc. 1992.

[2] Davvaz, B. and Parnian-Garamaleky, Y.A., A Note On Exact Sequences, *Bull. Malaysian Math.* Soc. **22** (1999), No. 2, pp. 53–56.

[3] Davvaz, B. and Shabani-Solt, H., A Generalization Of Homological Algebra, *J. Korean Math*. Soc. **39** (2002), No. 6, pp. 881–898.

[4] Madanshekaf, A., Quasi-Exact Sequence and Finitely Presented Modules, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **Vol. 3** (2008), No. 2, pp. 49-53.

[5] Wisbauer, R., *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach : Philade, 1991.