



Strategi Pengendalian Penyebaran Penyakit Kolera dengan Vaksinasi, Edukasi, dan Karantina: Analisis Model dan Simulasi

Agusyarif Rezka Nuha^{1*}, La Ode Nashar², Andi Agung³, Bertu Rianto Takaendengan⁴, Widyastutifajri Nuha⁵.

¹ Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango, Gorontalo

² Program Studi Statistika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango, Gorontalo

³ Program Studi Matematika, FST, Universitas Pattimura, Ambon, Maluku

⁴ Program Studi Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo, Bone Bolango, Gorontalo

⁵ Program Studi Teknik Mesin, FT, Universitas Pattimura, Ambon, Maluku

agusyarif@ung.ac.id

Abstract

Cholera is an infectious disease transmitted through water contaminated with *Vibrio cholerae* bacteria. This disease remains a public health challenge, especially in areas with poor sanitation. This study developed an SVIQR-B mathematical model to analyze the dynamics of cholera spread, taking into account the effects of quarantine, vaccination, and environmental hygiene education. The analysis was conducted on disease-free and endemic equilibrium points using a local stability approach based on the basic reproduction number (R_0). The results showed that when $R_0 < 1$, the disease would disappear from the population, while $R_0 > 1$ indicated the potential for endemicity. Sensitivity analysis and numerical simulation results indicate that an increase in the transmission rate and a decrease in vaccine effectiveness cause an increase in the R_0 value, while an increase in vaccination coverage and the effectiveness of education contribute to a decrease in infection rates. These findings emphasize the importance of implementing integrated medical and educational interventions in efforts to control cholera in a sustainable manner.

Keywords: Basic reproduction number; cholera; education; quarantine; vaccination.

Abstrak

Kolera merupakan penyakit menular yang ditularkan melalui air terkontaminasi bakteri *Vibrio cholerae*. Penyakit ini masih menjadi tantangan kesehatan masyarakat, terutama di wilayah dengan sanitasi yang buruk. Penelitian ini mengembangkan model matematika tipe SVIQR-B untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit kolera dengan mempertimbangkan efek karantina, vaksinasi, dan edukasi kebersihan lingkungan. Analisis dilakukan terhadap titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik menggunakan pendekatan kestabilan lokal berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada kondisi $R_0 < 1$, penyakit akan menghilang dari populasi, sedangkan $R_0 > 1$ menunjukkan potensi terjadinya endemi. Hasil analisis sensitivitas dan simulasi numerik mengindikasikan bahwa peningkatan laju penularan dan penurunan efektivitas vaksin menyebabkan kenaikan nilai R_0 , sedangkan peningkatan cakupan vaksinasi dan efektivitas edukasi berkontribusi dalam menurunkan tingkat infeksi. Temuan ini menegaskan pentingnya penerapan intervensi terpadu berbasis medis dan edukatif dalam upaya pengendalian kolera secara berkelanjutan.

Kata Kunci: Bilangan reproduksi dasar, edukasi, karantina, kolera, vaksinasi.

1. PENDAHULUAN

Peanyakit kolera termasuk dalam kategori penyakit menular, yang disebabkan oleh bakteri *Vibrio cholerae*. Penularan penyakit kolera terjadi melalui kontak langsung antara individu rentan dengan air atau makanan yang telah terkontaminasi bakteri *Vibrio cholerae*. Bakteri tersebut dapat bertahan pada lingkungan kotor dan sering kali menyebar melalui tinja yang dikeluarkan oleh individu terinfeksi. Setelah masuk ke dalam tubuh manusia, bakteri kolera akan menginfeksi usus halus yang mengakibatkan terjadinya diare disertai muntah secara berkelanjutan. Hal ini mengakibatkan penderita kehilangan cairan tubuh yang cepat hingga menyebabkan dehidrasi yang dapat berujung pada kelelahan serta penurunan tekanan darah. Jika tidak ditanggulangi secara efektif kolera dapat berkembang menjadi kondisi yang mengancam nyawa dalam waktu singkat (Clemens *et al.*, 2017).

Kolera telah menjadi ancaman serius terhadap kesehatan masyarakat di berbagai belahan dunia. Wabah kolera dapat terjadi secara tiba-tiba dan menyebar dengan cepat, mengakibatkan dampak kesehatan yang luas dan sering kali memicu krisis kesehatan masyarakat. Pada abad ke-19 penyakit kolera muncul di pinggiran Sungai Gangga, India hingga akhirnya menyebar ke seluruh Dunia. Bahkan dalam kurun waktu tersebut telah terjadi enam kali pandemi yang menewaskan jutaan orang dari berbagai belahan dunia. Tahun 1961 pandemi kolera muncul kembali untuk ke-tujuh kalinya di wilayah Asia Selatan hingga akhirnya mencapai benua Afrika ditahun 1971 dan Amerika pada tahun 1991 (World Health Organization, 2023). Walaupun telah terjadi kemajuan signifikan dalam pengendalian penyakit kolera di seluruh dunia, penyakit ini masih saja menjadi masalah kesehatan yang berpotensi untuk muncul kembali pada waktu yang tidak terduga (Buliva *et al.*, 2023).

Menghadapi tantangan ini, pemahaman mendalam tentang dinamika penyebaran penyakit kolera menjadi salah satu alternatif yang tidak dapat diabaikan khususnya dalam merancang strategi pencegahan, pengendalian, dan penanggulangan. Model matematika telah menjadi alat yang efektif dalam menggambarkan dan menganalisis dinamika penyebaran penyakit menular. Model matematika tipe SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) merupakan salah satu model yang telah diterapkan secara meluas untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit kolera. Model ini telah digunakan dalam memperkirakan bilangan reproduksi dasar untuk melakukan tindakan pengendalian pada beberapa wilayah dengan pola penularan yang bervariasi (Mukandavire *et al.*, 2011). Kerangka model SIR diperluas menjadi SIR-B dengan B (*bacterial*) yang merepresentasikan kelas populasi bakteri (Hu *et al.*, 2023; Yamazaki & Wang, 2016). Penggabungan populasi bakteri ke dalam model memberikan representasi yang lebih baik untuk memahami kemampuan bakteri *V. cholerae* dalam menyebabkan wabah kolera (Hartley *et al.*, 2005). Beberapa penelitian yang telah mengkaji penyebaran

penyakit kolera diantaranya dapat ditemukan pada (Abdul et al., 2022; Abubakar & Ibrahim, 2022; Nuha et al., 2023; Nuha & Resmawan, 2020; Resmawan et al., 2023)

Model matematika penyebaran penyakit kolera terus mengalami pengembangan dengan penambahan beberapa kelas populasi pada model. Diantaranya adalah model yang dikembangkan oleh Albalawi *et al* pada tahun 2023, berupa model penyebaran penyakit kolera dengan penambahan kelas populasi vaksin dan karantina. Penambahan kedua kelas populasi ini memberikan hasil perhitungan yang kuat dalam menganalisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar (Albalawi *et al.*, 2023). Namun, perumusan model matematika seringkali dianggap belum cukup memperhitungkan kompleksitas interaksi antar subpopulasi dalam konteks penyakit kolera. Kondisi populasi yang beragam serta interaksi antar kelas populasi dapat memengaruhi penyebaran penyakit secara keseluruhan.

Indonesia sebagai negara kepulauan menghadapi tantangan besar dalam hal sanitasi, akses air bersih, dan keterbatasan layanan kesehatan di daerah pesisir (Rahman & Isnaeni, 2025; Unicef Indonesia, 2023). Kondisi ini menegaskan perlunya strategi pengendalian penyebaran penyakit kolera yang dapat mengintegrasikan edukasi kebersihan lingkungan sebagai faktor kunci. Selain itu, ditemukan bahwa sistem imun yang diperoleh melalui vaksinasi tidak bersifat permanen dan dapat mengalami degradasi seiring waktu, sehingga individu yang sebelumnya terlindungi dapat kembali rentan terhadap (Xu et al., 2025).

Oleh karena itu, pada penelitian ini dilakukan modifikasi model matematika penyebaran penyakit kolera dengan mengacu pada model yang dikembangkan oleh Albalawi *et al.*, pada tahun 2023. Modifikasi dilakukan dengan mempertimbangkan bahwa sistem imun yang diperoleh melalui vaksinasi dapat mengalami degradasi seiring waktu hingga akhirnya menghilang. Konsep ini sebelumnya juga telah diterapkan pada model yang dikembangkan oleh Tian *et al.*, pada tahun 2019. Namun, model tersebut belum mempertimbangkan peran edukasi dalam pengendalian penyakit, serta mengasumsikan bahwa individu yang sembuh tidak akan kembali rentan terhadap infeksi.

Pada penelitian ini, efektivitas edukasi kebersihan lingkungan turut dimasukkan sebagai salah satu komponen intervensi yang memengaruhi dinamika penyebaran penyakit. Selain itu, perumusan model juga mempertimbangkan kemungkinan individu sembuh (*recovered*) untuk kembali menjadi rentan (*susceptible*), sehingga tetap memiliki potensi tertular kembali. Selanjutnya, model dianalisis melalui penentuan daerah solusi, titik-titik kesetimbangan, serta sifat kestabilan dari masing-masing titik tersebut. Simulasi numerik diberikan pada bagian akhir untuk menggambarkan dinamika sistem dalam jangka panjang dan memperkuat hasil teoritis dari analisis model. Pemahaman yang lebih baik terhadap dinamika ini diharapkan dapat menjadi landasan ilmiah dalam upaya pencegahan dan pengendalian penyebaran kolera di masa mendatang.

2. FORMULASI MODEL

Model matematis dikembangkan untuk menggambarkan interaksi antara populasi manusia dan bakteri patogen di lingkungan dalam proses terjadinya penyebaran penyakit kolera. Populasi manusia dalam model ini dibagi menjadi lima kategori, yaitu: individu rentan (S), individu yang mendapatkan kekebalan tubuh dari vaksin (V), individu terinfeksi (I), individu yang dikarantina (Q), dan individu sembuh (R). Selain itu, populasi bakteri di lingkungan (B) juga dimasukkan sebagai komponen krusial dalam model.

Pertumbuhan populasi rentan (S) ditentukan oleh laju kelahiran alami Λ , sementara pengurangan populasi ini dapat terjadi melalui vaksinasi (ψ), kematian alami (μ), dan penularan penyakit. Individu rentan dapat terinfeksi melalui kontak dengan bakteri di lingkungan atau interaksi langsung dengan individu terinfeksi dengan laju penularan masing masing sebesar β_e dan β_h . Namun resiko penularan dapat menurun dengan adanya program edukasi kebersihan (ω). Populasi rentan juga dapat meningkat kembali akibat penurunan kekebalan tubuh individu tervaksin (ξ) serta transisi individu sembuh menjadi rentan (θ). Adapun individu yang memperoleh kekebalan dari vaksinasi (V), tidak sepenuhnya dapat terlindungi dari infeksi, hal ini disebabkan adanya kemungkinan degradasi efektivitas vaksin (p).

Sementara itu, populasi individu terinfeksi (I) dapat mengalami peningkatan apabila terjadi penularan dari populasi individu rentan dan individu yang divaksinasi. Pengurangan populasi individu terinfeksi terjadi melalui pemberlakuan karantina (ε), kematian akibat penyakit (δ) dan kematian alami (μ). Keberadaan populasi individu terinfeksi dapat memicu terjadinya pencemaran lingkungan (α) hingga mengakibatkan bertambahnya jumlah individu pada populasi bakteri (B). Populasi bakteri ini dapat berkurang akibat kematian alami dengan laju sebesar σ .

Individu terinfeksi juga dapat berpindah ke dalam kelas populasi individu yang karantina (Q), untuk mendapatkan perawatan. Populasi ini dapat berkurang melalui kesembuhan (η) dan apabila terjadi kematian alamiah maupun kematian karena penyakit. Kesembuhan dari individu yang dikarantina dapat menambah jumlah individu sembuh (R). Namun, individu sembuh tersebut masih berisiko untuk menjadi rentan kembali apabila terjadi penurunan kekebalan tubuh (θ). Pada model ini, setiap individu pada populasi manusia dapat mengalami kematian alami sebesar μ .

Secara matematis model disusun dalam bentuk sistem persamaan diferensial dengan memperhitungkan parameter transmisi dan progresi penyakit, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda + \xi V + \theta R - (1 - \omega) \left[\frac{\beta_e B}{k+B} + \beta_h I \right] S - \psi S - \mu S$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \psi S - (1 - \omega)p \left[\frac{\beta_e B}{k+B} + \beta_h I \right] V - \xi V - \mu V \\
\frac{dI}{dt} &= (1 - \omega) \left[\frac{\beta_e B}{k+B} + \beta_h I \right] S + (1 - \omega)p \left[\frac{\beta_e B}{k+B} + \beta_h I \right] V - \varepsilon I - (\mu + \delta)I \\
\frac{dQ}{dt} &= \varepsilon I - \eta Q - (\mu + \delta)Q \\
\frac{dR}{dt} &= \eta Q - \theta R - \mu R \\
\frac{dB}{dt} &= \alpha(1 - \omega)I - \sigma B
\end{aligned} \tag{1}$$

Model ini menyediakan kerangka kerja ilmiah untuk memahami interaksi kompleks antara berbagai faktor yang mempengaruhi penyebaran kolera

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan analisis dan simulasi model, guna memahami dinamika sistem serta implikasi teoritis dan praktisnya. Pembahasan mencakup kajian daerah solusi model, titik kesetimbangan, sifat kestabilan titik kesetimbangan, simulasi numerik, dan interpretasinya.

3.2 Kepositifan dan Batas Solusi Model

Model

Lemma 1. *Solusi model pada persamaan (1) adalah taknegatif asalkan nilai awal dari seluruh variabel juga taknegatif. Daerah solusi taknegatif Ω didefinisikan sebagai berikut:*

$$\Omega = \left\{ S(t), V(t), I(t), Q(t), R(t), B(t) \in \mathbb{R}_+^6 \mid N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \text{ dan } B(t) \leq \frac{\alpha(1 - \omega)\Lambda}{\mu\sigma} \right\},$$

di mana $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$.

Bukti. Penjumlahan pada seluruh persamaan pada kelas populasi manusia menghasilkan

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta(I + Q).$$

Karena δI dan δQ bernilai positif, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &\leq \Lambda - \mu N, \text{ atau} \\
\frac{dN}{dt} + \mu N &\leq \Lambda.
\end{aligned}$$

Misalkan c_h menyatakan konstanta positif sehingga berlaku

$$\frac{dN}{dt} + \mu N = \Lambda - c_h. \tag{2}$$

Solusi dari persamaan (2) adalah

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + N_0 e^{-\mu t} - \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu t} - \frac{c_h}{\mu} (1 - e^{-\mu t}).$$

di mana $N(0) = N_0$. Karena $N_0 \geq 0$ serta $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$ diperoleh

$$0 \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (3)$$

Selanjutnya pada kelas populasi bakteri berlaku

$$\frac{dB}{dt} + \sigma B = \alpha(1 - \omega)I.$$

Berdasarkan persamaan (3) diperoleh

$$\frac{dB}{dt} + \sigma B \leq \alpha(1 - \omega) \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right).$$

Dengan memisalkan c_b sebagai konstanta positif sedemikian sehingga,

$$\frac{dB}{dt} + \sigma B = \frac{\alpha(1 - \omega)\Lambda}{\mu} - c_b \quad (4)$$

Solusi dari persamaan (4)

$$B(t) = \frac{\alpha(1 - \omega)\Lambda}{\mu\sigma} + B_0 e^{-\sigma t} - \frac{\alpha(1 - \omega)\Lambda}{\mu\sigma} e^{-\sigma t} - \frac{c_b}{\sigma} (1 - e^{-\sigma t}).$$

di mana $B(0) = B_0$. Karena $B_0 \geq 0$ serta $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \frac{\alpha(1 - \omega)\Lambda}{\mu\sigma}$ diperoleh

$$0 \leq B(t) \leq \frac{\alpha(1 - \omega)\Lambda}{\mu\sigma}.$$

3.1 Titik Keseimbangan Model

Model pada sistem persamaan (1) memiliki titik keseimbangan bebas penyakit E_0 dan titik keseimbangan endemik E^* yang diperoleh dari solusi persamaan $\dot{S} = \dot{V} = \dot{I} = \dot{Q} = \dot{R} = \dot{B} = 0$, di mana:

$$E_0 = (S_0, V_0, I_0, Q_0, R_0, B_0) = \left(\frac{\Lambda(\mu + \xi)}{\mu(\mu + \xi + \psi)}, \frac{\Lambda\psi}{\mu(\mu + \xi + \psi)}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

dan

$$E^* = (S^*, V^*, I^*, Q^*, R^*, B^*)$$

dengan

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{(B^* + k)(\theta R^* + \Lambda + \xi V^*)}{B^*(\beta_e + \beta_h I^* + \mu + \psi - (\beta_e + \beta_h I^*)\omega) + k(\mu + \psi + I^*(\beta_h - \beta_h \omega))} \\ V^* &= \frac{\psi S^*}{\mu + \xi + \frac{p\beta_e(1 - \omega)B^*}{B^* + k} - p\beta_h(1 - \omega)I^*} \\ I^* &= \frac{B^*(S^* + V^*p)\beta_e(1 - \omega)}{(B^* + k)(\delta + \varepsilon + \mu - (S^* + V^*p)\beta_h(1 - \omega))} \\ Q^* &= \frac{\varepsilon I^*}{\delta + \eta + \mu} \\ R^* &= \frac{\varepsilon \eta I^*}{(\delta + \eta + \mu)(\theta + \mu)} \\ B^* &= \frac{\alpha(1 - \omega)I^*}{\sigma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Kedua titik kesetimbangan ini menjadi dasar dalam memahami stabilitas sistem dan potensi transisi antara keadaan sehat dan endemik.

3.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) ditentukan dengan menggunakan metode *the next generation matrix* (Driessche & Watmough, 1945). Metode ini berfokus pada kompartemen infeksi (populasi yang telah terjangkit penyakit), yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= (1 - \omega) \left[\frac{\beta_e B}{k + b} + \beta_h I \right] S + (1 - \omega) p \left[\frac{\beta_e B}{k + b} + \beta_h I \right] V - \varepsilon I - (\mu + \delta) I \\ \frac{dQ}{dt} &= \varepsilon I - \eta Q - (\mu + \delta) Q \\ \frac{dB}{dt} &= \alpha(1 - \omega) I - \sigma B.\end{aligned}$$

Diperoleh, matriks F dan V yang masing-masing menyatakan pertumbuhan infeksi baru dan perpindahan antar kompartemen sebagai berikut:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\beta_h \Lambda(\mu + \xi + p\psi)(1 - \omega)}{\mu(\mu + \xi + \psi)} & 0 & \frac{\beta_e \Lambda(\mu + \xi + p\psi)(1 - \omega)}{k\mu(\mu + \xi + \psi)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -\delta - \varepsilon - \mu & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\delta - \eta - \mu & 0 \\ \alpha - \alpha\omega & 0 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

The next generation matrix dinyatakan sebagai K yang merupakan hasil perkalian $K = -FV^{-1}$, yaitu

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\Lambda(\mu + \xi + p\psi)(k\beta_h\sigma + \alpha\beta_e(1 - \omega))(1 - \omega)}{k\mu(\delta + \varepsilon + \mu)\sigma(\mu + \xi + \psi)} & 0 & \frac{\beta_e \Lambda(\mu + \xi + p\psi)(1 - \omega)}{k\mu\sigma(\mu + \xi + \psi)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilangan reproduksi dasar merupakan nilai eigen positif terbesar dari matriks K , yaitu

$$R_0 = \frac{\Lambda(\mu + \xi + p\psi)(k\beta_h\sigma + \alpha\beta_e(1 - \omega))(1 - \omega)}{k\mu(\delta + \varepsilon + \mu)\sigma(\mu + \xi + \psi)}$$

atau

$$R_0 = R_1 + R_2$$

di mana:

$$R_1 = \frac{\beta_h \Lambda(\mu + \xi + p\psi)(1 - \omega)}{\mu(\delta + \varepsilon + \mu)(\mu + \xi + \psi)},$$

$$R_2 = \frac{\Lambda\alpha\beta_e(1 - \omega)^2(\mu + \xi + p\psi)}{k\mu\sigma(\delta + \varepsilon + \mu)(\mu + \xi + \psi)}.$$

Teorema 2. Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 akan selalu eksis, sedangkan titik kesetimbangan endemik E^* eksis jika $R_0 > 1$.

Bukti. Tinjau kembali titik kesetimbangan endemik E^* yang terdapat pada sistem persamaan (5), di mana Q^* , R^* , dan B^* dapat dinyatakan sebagai suatu persamaan dengan

variabel I^* yaitu $Q(I) = \frac{\varepsilon I}{\delta + \eta + \mu}$, $R(I) = \frac{\varepsilon \eta I}{(\delta + \eta + \mu)(\theta + \mu)}$, dan $B(I) = \frac{\alpha(1-\omega)I}{\sigma}$. Apabila persamaan ketiga persamaan tersebut disubstitusi pada S^* dan V^* diperoleh persamaan

$$S(I) = \left(\Lambda + \frac{\varepsilon \eta \theta I}{(\delta + \eta + \mu)(\theta + \mu)} \right) \left(\frac{1}{\mu + \psi - G_1(I) - G_2(I)} \right)$$

dan

$$V(I) = \left(\Lambda + \frac{\varepsilon \eta \theta I}{(\delta + \eta + \mu)(\theta + \mu)} \right) \left(\frac{\psi}{(G_1(I) + G_2(I) - \mu - \psi)(\mu + \xi - pG_2(I))} \right)$$

$$\text{dengan } G_1(I) = \frac{\xi \psi}{\mu + \xi + \frac{p(k\beta_h \sigma + \alpha(\beta_e + \beta_h I)(1-\omega))(1-\omega)I}{k\sigma + \alpha(1-\omega)I}}, \quad G_2(I) = -\frac{(k\beta_h \sigma + \alpha(\beta_e + \beta_h I)(1-\omega))(1-\omega)I}{k\sigma + \alpha(1-\omega)I}.$$

Substitusi persamaan $S(I)$ dan $V(I)$ ke I^* diperoleh

$$I(a_0 I^4 + a_1 I^3 + a_2 I^2 + a_1 I + a_4) = 0 \quad (6)$$

di mana

$$a_0 = p\alpha^2 \beta_h^2 (\delta^2 (\theta + \mu) + \mu(\eta + \mu)(\theta + \mu) + \varepsilon \mu(\eta + \theta + \mu) + \delta(\theta + \mu)(\varepsilon + \eta + 2\mu)) n_4^4$$

$$a_4 = [k^2 \sigma^2 \mu (\delta + \varepsilon + \mu)(\mu + \xi + \psi)] (\delta + \eta + \mu)(\theta + \mu)(1 - R_0)$$

dengan

$$m_1 = (\delta + \varepsilon + \mu) \quad n_1 = (\eta + \theta + \mu) \quad n_4 = (1 - \omega)$$

$$m_2 = (\mu + \xi + \psi) \quad n_2 = (\delta + \eta + \mu)$$

$$m_3 = (\mu + \xi + p\psi) \quad n_3 = (\varepsilon + \eta + 2\mu).$$

Salah satu akar dari persamaan (6) adalah $I = 0$ yang menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_0 akan selalu eksis. Sementara itu, nilai titik kesetimbangan endemik E^* diperoleh dengan menganalisis koefisien a_i untuk $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa a_i untuk $i = 0, 1, 2, 3$ selalu bernilai positif, sedangkan nilai a_4 bergantung pada nilai R_0 . Jika $R_0 > 1$, maka a_4 bernilai negatif, serta $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 < 0$. Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz kondisi ini menunjukkan adanya I^* yang bernilai positif. Akibatnya, variabel S^*, V^*, Q^*, R^* , dan B^* juga bernilai positif, yang mengindikasikan keberadaan titik kesetimbangan E^* .

3.3 Sifat Kestabilan

Teorema 3. Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti. Matriks jacobian untuk titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 yang dievaluasi dari model (2.1) adalah

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu - \psi & \xi & -\frac{\beta_h \Lambda(\mu + \xi)(1 - \omega)}{\mu(\mu + \xi + \psi)} & 0 & \theta & -\frac{\beta_e \Lambda(\mu + \xi)(1 - \omega)}{k\mu(\mu + \xi + \psi)} \\ \psi & -\mu - \xi & -\frac{p\beta_h \Lambda \psi(1 - \omega)}{\mu(\mu + \xi + \psi)} & 0 & 0 & -\frac{p\beta_e \Lambda \psi(1 - \omega)}{k\mu(\mu + \xi + \psi)} \\ 0 & 0 & W_1 & 0 & 0 & W_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\delta - \eta - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & -\theta - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \alpha\omega & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

di mana:

$$W_1 = \frac{\beta_h \Lambda(\mu + \xi + p\psi)(1 - \omega)}{\mu(\mu + \xi + \psi)} - (\delta + \varepsilon + \mu),$$

$$W_2 = \frac{\beta_e \Lambda(\mu + \xi + p\psi)(1 - \omega)}{k\mu(\mu + \xi + \psi)}.$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_0)$ adalah

$$\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$$

atau

$$(\lambda + \delta + \eta + \mu)(\lambda + \theta + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \mu + \xi + \psi)[\lambda^2 + b_1\lambda + b_2] = 0 \quad (7)$$

di mana:

$$b_1 = \sigma + (1 - R_1)(\delta + \varepsilon + \mu),$$

$$b_2 = (1 - R_0)\sigma(\delta + \varepsilon + \mu).$$

Berdasarkan persamaan (7) diperoleh empat nilai eigen $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$. Sedangkan dua nilai eigen lainnya diperoleh dengan menganalisis persamaan karakteristik berikut;

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \quad (8)$$

Andaikan $R_0 < 1$, diperoleh $b_i > 0$ untuk $i = 1, 2$. Berdasarkan sifat akar-akar persamaan kuadrat dari (8) diperoleh $\lambda_i < 0$ untuk $i = 5, 6$. Hal ini menunjukkan bahwa seluruh nilai eigen dari matriks jacobian $J(E_0)$ bernilai negatif, yang mengakibatkan titik kesetimbangan E_0 bersifat stabil asimtotik lokal. Sebaliknya, jika $R_0 > 1$ diperoleh $b_2 < 0$ yang mengakibatkan salah satu akar dari persamaan (8) bernilai negatif atau $\lambda_5 > 0$. Dengan demikian titik kesetimbangan E_0 bersifat tidak stabil.

Teorema 4. *Jika $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan endemic E_* bersifat stabil asimtotik lokal.*

Bukti. Misalkan β_h^* merupakan parameter bifurkasi yang bersesuaian dengan kondisi $R_0 = 1$. Dengan menyelesaikan persamaan $R_0 = 1$, diperoleh

$$\beta_h^* = \frac{\mu(\delta + \varepsilon + \mu)(\mu + \xi + \psi)}{\Lambda(\mu + \xi + p\psi)(1 - \omega)} - \frac{\alpha\beta_e(1 - \omega)}{k\sigma}.$$

Matriks Jacobian dari model (2.1) yang dievaluasi dari titik E_0 dan β_h^* adalah $J(E_0, \beta_h^*)$. Berdasarkan persamaan (3.6), kondisi $R_0 = 1$ mengakibatkan matriks $J(E_0, \beta_h^*)$ memiliki satu nilai eigen nol dan nilai eigen lainnya yang bertanda negatif. Nilai eigen nol tersebut memiliki vektor eigen kanan \vec{U} dan \vec{V} yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\vec{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T$$

$$\vec{V} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6]^T$$

dengan

$$u_1 = \frac{\frac{\eta\theta(\mu+\xi)}{\theta+\mu} - \frac{\alpha\beta_e\Lambda(\delta+\varepsilon+\mu)(\delta+\eta+\mu)((\mu+\xi)^2+p\xi\psi)(1-\omega)^2}{k\varepsilon\sigma(\mu(\delta+\varepsilon+\mu)(\mu+\xi+\psi)-\beta_h^*\Lambda(\mu+\xi+p\psi)(1-\omega))}}{\mu(\mu+\xi+\psi)}, \quad u_2 = \frac{\psi(\frac{\eta\theta}{\theta+\mu} - \frac{\alpha\beta_e\Lambda(\delta+\varepsilon+\mu)(\delta+\eta+\mu)(\mu+p\mu+\xi+p\psi)(1-\omega)^2}{k\varepsilon\sigma(\mu(\delta+\varepsilon+\mu)(\mu+\xi+\psi)-\beta_h^*\Lambda(\mu+\xi+p\psi)(1-\omega))})}{\mu(\mu+\xi+\psi)},$$

$$u_3 = \frac{\alpha\beta_e\Lambda(\delta+\eta+\mu)(\mu+\xi+p\psi)(1-\omega)^2}{k\varepsilon\sigma(\mu(\delta+\varepsilon+\mu)(\mu+\xi+\psi)-\beta_h^*\Lambda(\mu+\xi+p\psi)(1-\omega))}, \quad u_4 = 1, \quad u_5 = \frac{\eta}{\theta+\mu}, \quad u_6 = \frac{\alpha(\delta+\eta+\mu)(1-\omega)}{\varepsilon\sigma},$$

$$v_1 = v_2 = v_4 = v_5 = 0, \quad v_3 = 1, \quad \text{dan} \quad v_6 = \frac{\beta_e\Lambda(\mu+\xi+p\psi)(1-\omega)}{k\mu\sigma(\mu+\xi+\psi)}.$$

Definisikan variabel baru $x_1 = S$, $x_2 = V$, $x_3 = I$, $x_4 = Q$, $x_5 = R$, dan $x_6 = B$, sehingga diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= \Lambda + \xi x_2 + \theta x_5 - (1-\omega) \left[\frac{\beta_e x_6}{k+x_6} + \beta_h x_3 \right] x_1 - \psi x_1 - \mu x_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= \psi x_1 - (1-\omega) p \left[\frac{\beta_e x_6}{k+x_6} + \beta_h x_3 \right] x_2 - \xi x_2 - \mu x_2 \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= (1-\omega) \left[\frac{\beta_e x_6}{k+x_6} + \beta_h x_3 \right] x_1 + (1-\omega) p \left[\frac{\beta_e x_6}{k+x_6} + \beta_h x_3 \right] x_2 - \varepsilon x_3 \\ &\quad - (\mu + \delta) x_3 \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= \varepsilon x_3 - \eta x_4 - (\mu + \delta) x_4 \\ f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= \eta x_4 - \theta x_5 - \mu x_5 \\ f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= \alpha(1-\omega) x_3 - \sigma x_6. \end{aligned} \quad (8)$$

Selanjutnya, definisikan konstanta a dan b yang masing-masing dinyatakan sebagai;

$$a = \sum_{k,i,j=1}^6 v_k u_i u_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} (E_0, \beta_h^*)$$

$$b = \sum_{k,i=1}^6 v_k u_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta_h} (E_0, \beta_h^*).$$

Berdasarkan sistem (3.8) diperoleh

$$a = -\frac{m_1 n_2 [m_5 n_3 \delta (\theta + \mu) + m_5 \delta^2 (\theta + \mu) + \mu a^*]}{m_3^2 \varepsilon^2 \Lambda (\theta + \mu)} < 0,$$

$$b = \frac{\Lambda (\delta + \eta + \mu) (\mu + \xi + p\psi) (1 - \omega)}{\varepsilon \mu (\mu + \xi + \psi)} > 0,$$

di mana:

$$a^* = m_5 (\eta + \mu) (\theta + \mu) + \varepsilon (m_5 (\theta + \mu) + \eta ((\mu + \xi)^2 + p(\mu + p(\theta + \mu) + 2\xi - \theta)\psi + p^2 \psi^2))$$

$$m_5 = (\mu^2 + 2\mu\xi + p(1+p)\mu\psi + (\xi + p\psi)^2).$$

Menurut teorema Castillo [Sumber], kondisi $a < 0$ dan $b > 0$ menunjukkan bahwa sistem (2.1) mengalami bifurkasi maju pada $R_0 = 1$. Dengan kata lain, ketika R_0 bergerak naik hingga mencapai kondisi $R_0 > 1$ titik kesetimbangan endemik E_* bersifat stabil asimtotik lokal.

3.4 Simulasi Numerik

Untuk memperoleh gambaran kuantitatif terhadap dinamika model pada sistem persamaan (1), dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan parameter yang relevan secara biologis. Simulasi ini bertujuan untuk mengevaluasi perilaku model dalam kondisi bebas penyakit dan endemik serta mengidentifikasi pengaruh perubahan nilai parameter terhadap penyebaran penyakit.

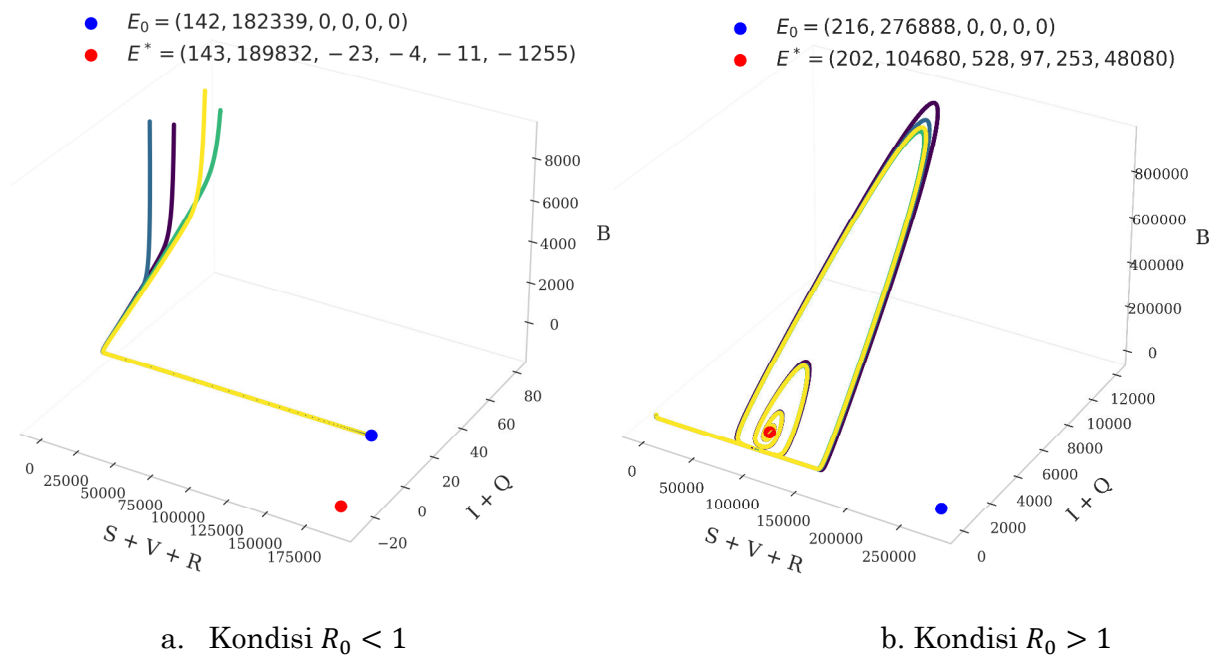
Tahap awal untuk simulasi numerik dilakukan dengan mempertimbangkan dua skenario epidemiologis berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar R_0 sebagaimana yang terdapat pada Teorema 3 dan Teorema 4, yaitu kondisi $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Nilai parameter yang digunakan mengacu pada Tabel 1. Hasil perhitungan ditampilkan secara visual pada Gambar 1.

Tabel 1. Nilai Parameter Model

Definisi Parameter	Simbol	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$	Sumber
Laju kelahiran alami	Λ	10	15,1854	(Albalawi et al., 2023)
Laju penularan penyakit akibat kontak langsung dengan bakteri di lingkungan	β_e	0,2143	0,2143	(Albalawi et al., 2023)
Laju penularan penyakit akibat interaksi dengan individu terinfeksi	β_h	4×10^{-5}	4×10^{-5}	(Seidu et al., 2023)
Tingkat efektivitas edukasi dalam menjaga kebersihan lingkungan	ω	0,82	0,7	Asumsi
Konsentrasi jenuh bakteri dalam air	k	10^9	10^9	(Albalawi et al., 2023)
Tingkat karantina pasien kolera	ε	0,0033143	0,0033143	(Albalawi et al., 2023)
Tingkat kesembuhan individu yang dikarantina melalui perawatan	η	0,003	0,003	(Albalawi et al., 2023)
Laju pertumbuhan bakteri akibat pencemaran lingkungan oleh manusia	α	100	100	Asumsi
Laju kematian bakteri	σ	0,33	0,33	(Seidu et al., 2023)
Laju vaksinasi individu rentan	ψ	0,07	0,07	(Albalawi et al., 2023)
Laju degradasi efektivitas vaksin	p	0,0126821	0,0126821	Asumsi
Laju kematian manusia secara alami	μ	5.48×10^{-5}	5.48×10^{-5}	(Seidu et al., 2023)
Laju kematian manusia akibat kolera	δ	0,015	0,015	Asumsi

Definisi Parameter	Simbol	$R_0 < 1$	$R_0 > 1$	Sumber
Tingkat penurunan kekebalan tubuh individu sembuh	θ	0,4	0,4	(Assegaf et al., 2020)
Tingkat penyusutan kekebalan tubuh yang diperoleh dari vaksin	ξ	5×10^{-8}	5×10^{-8}	Asumsi
Bilangan Reproduksi Dasar	R_0	0,96	2,44	

Berdasarkan Gambar 1, seluruh lintasan sistem untuk kondisi $R_0 < 1$ menuju pada titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 yang mengindikasikan bahwa seiring berjalannya waktu penyakit akan menghilang dari sistem. Sebaliknya, pada kondisi $R_0 > 1$, lintasan sistem mengarah ke titik kesetimbangan endemik E^* , dengan pola spiral atau siklik yang menunjukkan keberlangsungan infeksi dalam jangka panjang. Perhitungan ini memperkuat hasil analitik sebelumnya dan menunjukkan bahwa nilai R_0 berperan sebagai indikator kritis dalam menentukan stabilitas dan keberadaan penyakit dalam sistem.

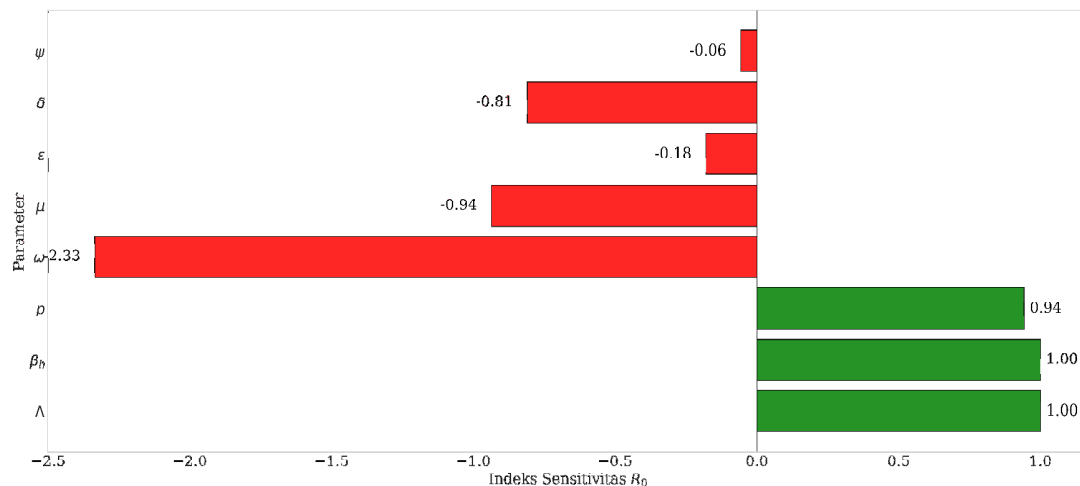
a. Kondisi $R_0 < 1$ b. Kondisi $R_0 > 1$ **Gambar 1.** Dinamika populasi berdasarkan nilai R_0

Selanjutnya dilakukan analisis sensitivitas yang didefinisikan sebagai $C_p^{R_0}$ yaitu;

$$C_p^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial p^*} \times \frac{p^*}{R_0},$$

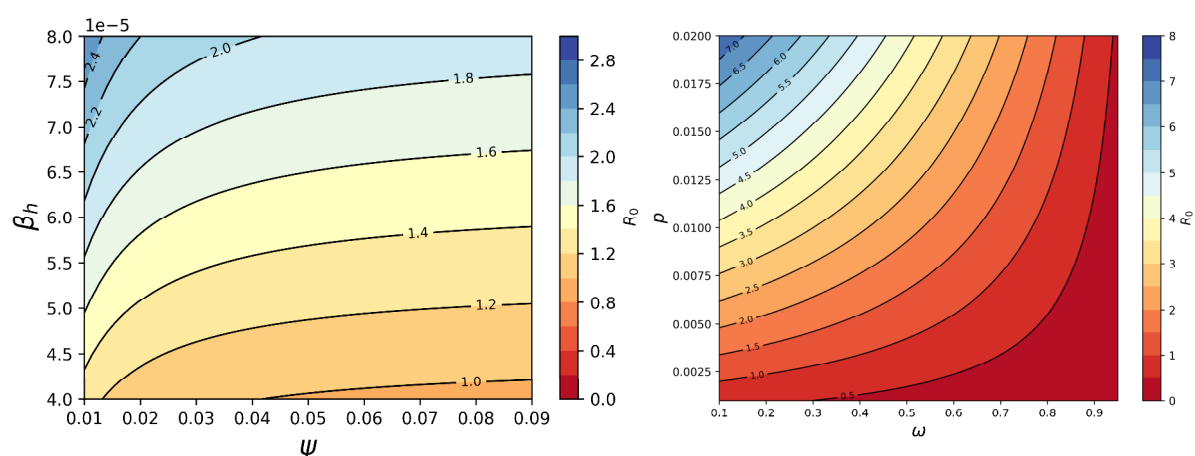
dengan p^* menyatakan parameter model (Ndii, 2018). Hasil analisis sensitivitas pada Gambar 2 menunjukkan bahwa beberapa parameter memiliki pengaruh berbeda terhadap perubahan nilai R_0 . Parameter dengan indeks sensitivitas positif, seperti laju penularan akibat interaksi dengan individu terinfeksi (β_h), berkontribusi langsung

terhadap peningkatan nilai R_0 , di mana semakin tinggi intensitas kontak antara individu rentan dan terinfeksi, semakin besar pula potensi penyebaran kolera dalam populasi. Sebaliknya, parameter dengan indeks sensitivitas negatif, seperti laju vaksinasi (ψ) dan tingkat efektivitas edukasi kebersihan lingkungan (ω), berperan dalam menurunkan nilai R_0 secara signifikan. Temuan ini menegaskan urgensi intervensi kesehatan masyarakat yang terfokus pada pengurangan kontak infeksius, peningkatan cakupan vaksinasi, serta penguatan edukasi perilaku hidup bersih dan sehat sebagai strategi efektif dalam pengendalian kolera.



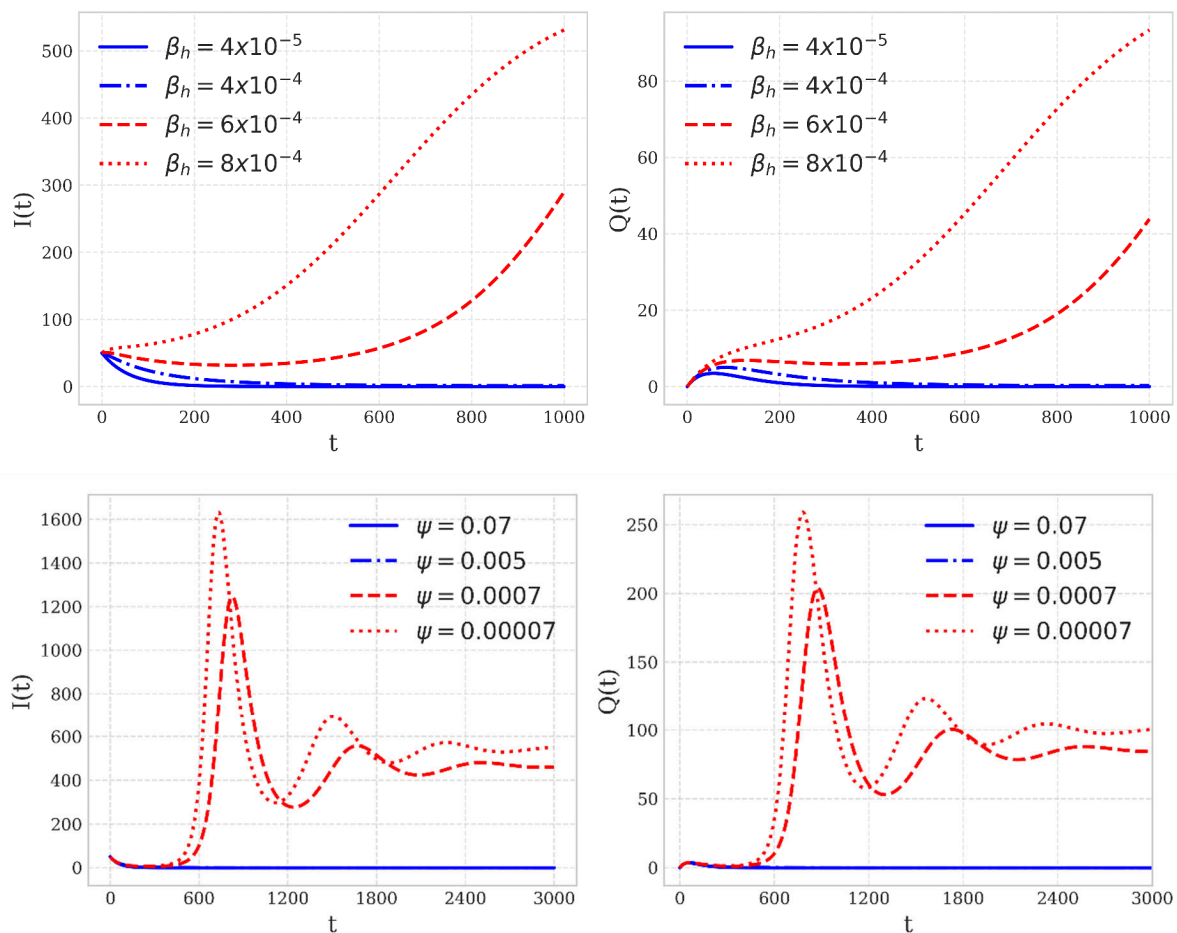
Gambar 2. Nilai Indeks sensitivitas R_0

Selain itu, pengaruh perubahan nilai parameter terhadap nilai R_0 disajikan melalui plot kontur pada Gambar 3. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa kombinasi antar parameter seperti laju vaksinasi (ψ), laju penularan akibat kontak dengan individu terinfeksi (β_h), dan efektivitas edukasi kebersihan lingkungan (ω) memiliki dampak yang berbeda terhadap perubahan nilai R_0 . Hasil ini memberikan gambaran umum bahwa intervensi yang tepat pada parameter-parameter kunci dapat membantu menurunkan nilai R_0 dan mengendalikan penyebaran kolera secara lebih efektif.



Gambar 3. Pengaruh perubahan nilai parameter terhadap R_0

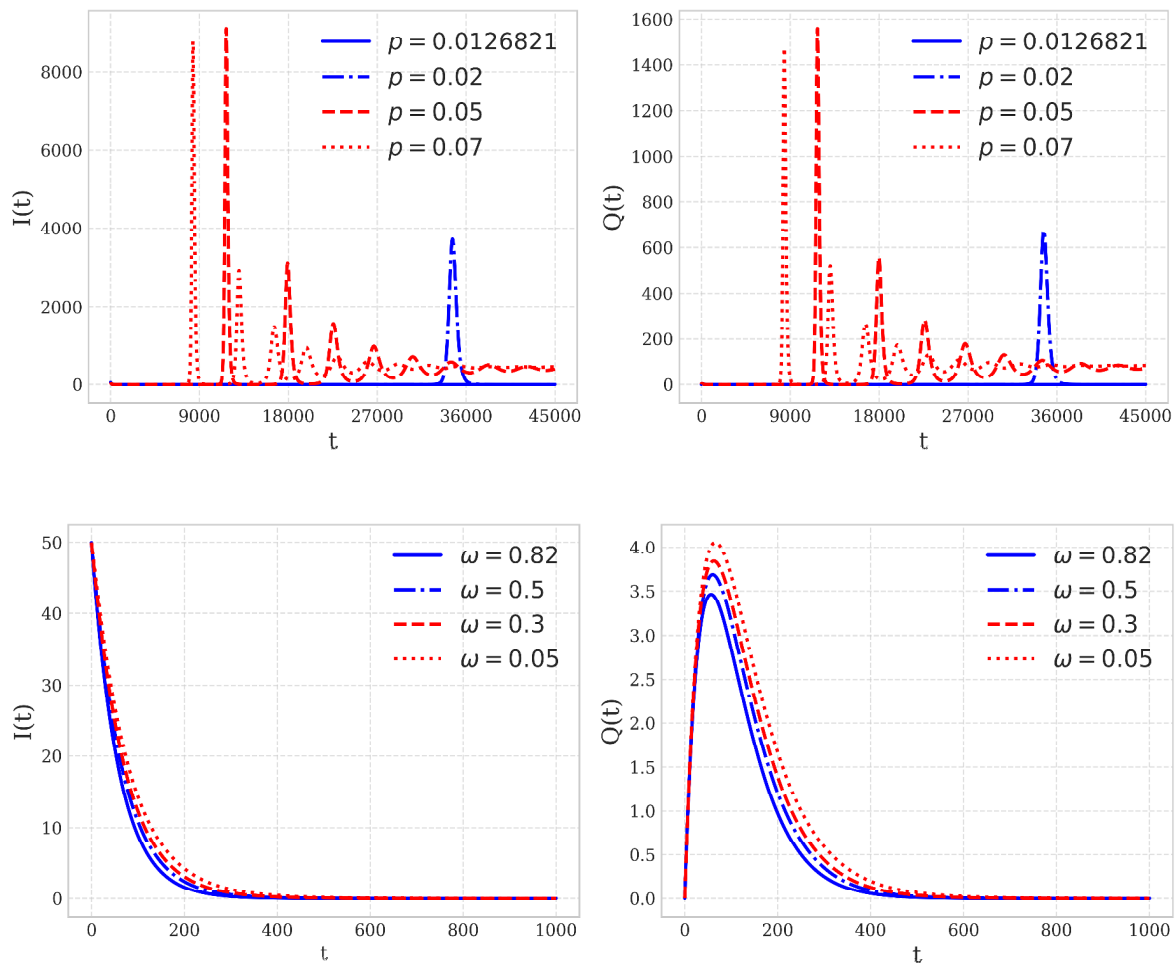
Untuk memahami lebih lanjut bagaimana parameter model memengaruhi dinamika populasi, dilakukan simulasi numerik dengan memvariasikan beberapa nilai parameter secara sistematis. Parameter yang dianalisis dalam simulasi ini mencerminkan komponen-komponen utama yang juga divisualisasikan dalam plot kontur pada Gambar 3, yaitu laju penularan akibat kontak dengan individu terinfeksi (β_h), laju vaksinasi (ψ), laju degradasi efektivitas vaksin (p), dan tingkat efektivitas edukasi dalam menjaga kebersihan lingkungan ω .



Gambar 4. Pengaruh perubahan nilai β_h dan ψ terhadap dinamika populasi

Hasil simulasi menunjukkan bahwa peningkatan nilai β_h , secara signifikan mempercepat dan memperbesar jumlah individu terinfeksi dan dikarantina, sebagaimana yang terdapat pada Gambar 4. Pada nilai awal $\beta_h = 4 \times 10^{-5}$, sistem berada dalam kondisi stabil pada titik kesetimbangan bebas penyakit, yang mencerminkan situasi di mana penyakit tidak menyebar dalam populasi. Namun ketika nilai β_h ditingkatkan hingga 8×10^{-4} , sistem mengalami transisi menuju kondisi endemik, yang ditandai dengan keberlanjutan infeksi dalam populasi. Sebaliknya peningkatan nilai ψ yang merepresentasikan laju vaksinasi, mengakibatkan penurunan yang signifikan pada

jumlah individu terinfeksi dan dikarantina. Sistem yang semula berada dalam kondisi endemi mengalami perubahan kestabilan menuju titik kesetimbangan bebas penyakit seiring peningkatan cakupan vaksinasi. Temuan ini menegaskan bahwa intensitas kontak langsung antara individu rentan dan terinfeksi merupakan faktor utama dalam mempercepat penyebaran penyakit, sementara vaksinasi terbukti sebagai intervensi yang sangat efektif dalam menekan laju transmisi dan mengarahkan sistem menuju eliminasi penyakit.



Gambar 5. Pengaruh perubahan nilai p dan ω terhadap dinamika populasi

Selanjutnya, simulasi terhadap perubahan nilai p dan ω disajikan pada Gambar 5. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa peningkatan laju degradasi efektivitas vaksin berdampak langsung terhadap peningkatan jumlah individu terinfeksi dan dikarantina. Apabila nilai t ditingkatkan, jumlah individu terinfeksi dan dikarantina akan semakin membesar serta memicu fluktuasi yang lebih tajam dalam dinamika infeksi. Hal ini mengindikasikan bahwa penurunan efektivitas vaksin dalam sistem populasi dapat mempercepat penyebaran penyakit dan mengganggu kestabilan epidemiologi. Sebaliknya, peningkatan nilai ω , yang merepresentasikan efektivitas edukasi dalam

menjaga kebersihan lingkungan, menunjukkan kontribusi positif terhadap pengendalian penyakit. Nilai ω yang lebih tinggi menghasilkan penurunan signifikan pada jumlah individu terinfeksi dan dikarantina, serta mempercepat transisi sistem menuju titik kesetimbangan bebas penyakit. Dengan demikian, perubahan perilaku melalui edukasi yang intensif memiliki dampak nyata dalam memperlambat transmisi dan memperkuat stabilitas sistem.

Secara umum, hasil simulasi yang diperoleh telah memberikan gambaran konsisten mengenai peran degradasi efektivitas vaksin dan edukasi kebersihan dalam memengaruhi dinamika penyebaran kolera. Namun, temuan yang diperoleh masih berada dalam kerangka asumsi matematis dan parameter literatur, sehingga belum sepenuhnya mencerminkan kompleksitas kondisi epidemiologi di lapangan. Oleh karena itu, hasil yang diperoleh dapat dipandang sebagai landasan awal yang membuka peluang bagi kajian lanjutan untuk mengembangkan model yang lebih komprehensif dan berbasis data nyata, sehingga semakin mendukung kebijakan kesehatan masyarakat dalam pengendalian kolera.

4. SIMPULAN

Studi ini menunjukkan bahwa nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) berperan sebagai indikator kritis dalam menentukan stabilitas sistem dan keberadaan penyakit dalam populasi. Intervensi yang dilakukan secara terpisah melalui penurunan laju penularan penyakit akibat kontak dengan individu terinfeksi (β_h), pengendalian laju degradasi efektivitas vaksin p , peningkatan laju vaksinasi pada populasi rentan (ψ), serta penguatan efektivitas edukasi kebersihan lingkungan (ω), berkontribusi signifikan dalam menekan penyebaran kolera. Penerapan intervensi tersebut terbukti mampu mengarahkan sistem menuju kondisi stabil pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Temuan ini menegaskan pentingnya pendekatan terpadu yang menggabungkan intervensi medis dan edukatif dalam strategi pengendalian penyakit berbasis model.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terimakasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat serta Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Gorontalo atas dukungan dana yang diberikan pada penelitian ini yang tertuang dalam Keputusan Dekan FMIPA UNG Nomor; 1176/UN47.B4/HK.04/2025 tentang Penetapan Dosen Peneliti pada Kegiatan Penelitian Riset Kolaboratif FMIPA UNG Tahun 2025. Juga kami sampaikan terimakasih kepada Laboratorium Komputasi Matematika FMIPA Universitas Negeri Gorontalo, atas dukungan fasilitas selama pelaksanaan penelitian ini.

6. REKOMENDASI

Penelitian selanjutnya disarankan untuk memodifikasi model dengan mempertimbangkan heterogenitas tingkat virulensi bakteri, khususnya dengan

membedakan antara bakteri berdaya infeksi rendah dan tinggi. Pendekatan ini penting untuk merepresentasikan dinamika penularan yang lebih realistis, mengingat kemampuan infeksi bakteri dapat bervariasi tergantung pada kondisi lingkungan dan tingkat kontaminasi. Namun, tantangan utama dalam pengembangan model ini adalah keterbatasan data kuantitatif terkait distribusi dan transisi antar tingkatan virulensi, yang memerlukan pendekatan estimasi atau asumsi berbasis literatur.

7. REFERENSI

- Abdul, N. S., Yahya, L., Resmawan, R., & Nuha, A. R. (2022). Dynamic analysis of the mathematical model of the spread of cholera with vaccination strategies. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 16(1), 281–292. <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss1pp279-290>
- Abubakar, S. F., & Ibrahim, M. O. (2022). Optimal control analysis of treatment strategies of the dynamics of cholera. *Journal of Optimization*, 2022, 1–26. <https://doi.org/10.1155/2022/2314104>
- Albalawi, W., Nisar, K. S., Aslam, A., Ozair, M., Hussain, T., Shoaib, M., & Zahran, H. Y. (2023). Mathematical modelling approach to cholera transmission with vaccination strategy. *Alexandria Engineering Journal*, 75, 191–207. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.05.053>
- Assegaf, F., Saragih, R., & Handayani, D. (2020). Adaptive sliding mode control for cholera epidemic model. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 16092–16099. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.428>
- Buliva, E., Elnossery, S., Okwarah, P., Tayyab, M., Brennan, R., & Abubakar, A. (2023). Cholera prevention, control strategies, challenges and world health organization initiatives in the eastern mediterranean region: a narrative review. *Heliyon*, 9(5), e15598. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e15598>
- Clemens, J. D., Nair, G. B., Ahmed, T., Qadri, F., & Holmgren, J. (2017). Cholera. *The Lancet*, 390(10101), 1539–1549. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(17\)30559-7](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(17)30559-7)
- Driessche, P. van den, & Watmough, J. (1945). Further notes on the basic reproduction number. In *Mathematical Epidemiology*. Springer.
- Hartley, D. M., Morris, J. G., & Smith, D. L. (2005). Hyperinfectivity: a critical element in the ability of v. *Cholerae* to cause epidemics? *PLoS Medicine*, 3(1), e7. <https://doi.org/10.1371/journal.pmed.0030007>
- Hu, Z., Wang, S., & Nie, L. (2023). Dynamics of a partially degenerate reaction-diffusion cholera model with horizontal transmission and phage-bacteria interaction. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2023, 1–38. <https://doi.org/10.58997/ejde.2023.08>
- Mukandavire, Z., Liao, S., Wang, J., Gaff, H., Smith, D. L., & Morris, J. G. (2011). Estimating the reproductive numbers for the 2008–2009 cholera outbreaks in Zimbabwe. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(21), 8767–8772. <https://doi.org/10.1073/pnas.1019712108>
- Ndii, M. Z. (2018). *Pemodelan Matematika*. Deepublish.
- Nuha, A. R., & Resmawan. (2020). Analisis model matematika penyebaran penyakit kolera dengan mempertimbangkan masa inkubasi. *JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN*, 17(2), 212–229. <https://doi.org/10.22487/2540766X.2020.v17.i2.15200>
- Nuha, A. R., Resmawan, R., Mahmud, S. L., Asriadi, A., Agung, A., & Chasanah, S. I. U. (2023). Analisis dinamik pada model matematika sveibr dengan kontrol optimal untuk pengendalian

- penyebaran penyakit kolera. *Euler : Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, 11(1), 154–165. <https://doi.org/10.34312/euler.v11i1.20611>
- Rahman, A., & Isnaeni, A. (2025). Environmental sanitation challenges and opportunities in indonesia coastal regions : a review. *Journal of Epidemiology and Health Science* 2(1), 121–126.
- Resmawan, R., Yahya, L., Mahmud, S. L., Nuha, A. R., & Laita, N. H. (2023). Dynamic analysis of the mathematical model for the cholera disease spread involving medication and enviromental sanitation. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 17(1), 0341–0360. <https://doi.org/10.30598/barekengvol17iss1pp0341-0360>
- Seidu, B., Wiah, E. N., & Asamoah, J. K. K. (2023). Optimal strategies for control of cholera in the presence of hyper-infective individuals. *Results in Physics*, 53, 106968. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106968>
- Tian, X., Xu, R., & Lin, J. (2019). Mathematical analysis of a cholera infection model with vaccination strategy. *Applied Mathematics and Computation*, 361, 517–535. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.05.055>
- Unicev Indonesia. (2023). *Water, sanitation and hygiene*. UNICEF. <https://www.unicef.org/indonesia/water-sanitation-and-hygiene>
- World Health Organization. (2023). *Cholera*. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/cholera#:~:text=During the 19th century%2C cholera,and the Americas in 1991>.
- Xu, H., Tiffany, A., Luquero, F. J., Kanungo, S., Bwire, G., Qadri, F., Garone, D., Ivers, L. C., Lee, E. C., Malembaka, E. B., Mendiboure, V., Bouhenia, M., Breakwell, L., & Azman, A. S. (2025). Protection from killed whole-cell cholera vaccines: a systematic review and meta-analysis. *The Lancet Global Health*, 13(7), e1203–e1212. [https://doi.org/10.1016/S2214-109X\(25\)00107-X](https://doi.org/10.1016/S2214-109X(25)00107-X)
- Yamazaki, K., & Wang, X. (2016). Global well-posedness and asymptotic behavior of solutions to a reaction-convection-diffusion cholera epidemic model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 21(4), 1297–1316. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2016.21.1297>