Mandalika Mathematics and Education Journal
Volume 7 Nomor 4, Desember 2025
e-ISSN 2715-1190| |p-ISSN 2715-8292
DOI: http://dx.doi.org/10.29303/jm.v7i4.10674

Studi Teoretis Indeks Sombor pada Graf-Graf yang Dikonstruksi dari Grup Hingga

Mufidatul Ghina Hapsari[1], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[2*], Abdurahim[2]

[1] *Mahasiswa Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Mataram*
[2] *Matematika, FMIPA, Universitas Mataram, Mataram*

Adhitya.wardhana@unram.ac.id

Abstract
This study explores the application of the Sombor Index to various types of graphs constructed from finite group structures. The Sombor Index is a topological descriptor used to measure the structural characteristics of a graph based on the degrees of its adjacent vertices. The research focuses on identifying general patterns and comparing Sombor Index values among several classes of group-based graphs, including coprime graphs, non-coprime graphs, unit graphs, nilpotent graphs, and power graphs. The study employs a theoretical approach through literature review and deductive mathematical analysis. Each graph is constructed according to the adjacency relations among group elements, followed by determining the vertex degrees to compute the Sombor Index systematically. The results reveal that the Sombor Index exhibits distinct characteristics depending on the structural properties of the underlying group, whether commutative or non-commutative. Moreover, a general pattern is established that highlights the relationship between algebraic group structures and the topological properties of their associated graphs. These findings contribute to the ongoing development of graph energy theory and topological indices in algebraic graph studies.

Keywords: Sombor Index; group graph; coprime graph; non-coprime graph; unit graph; nilpotent graph; power graph; finite group

Abstrak
Penelitian ini membahas penerapan Indeks Sombor pada berbagai jenis graf yang dibangun dari struktur grup hingga. Indeks Sombor merupakan salah satu indeks topologi yang digunakan untuk mengukur karakteristik graf melalui derajat simpul yang saling berhubungan. Penelitian ini difokuskan pada penentuan pola umum dan perbandingan nilai Indeks Sombor pada beberapa jenis graf grup, yaitu graf koprima, graf non-koprima, graf unit, graf nilpoten, dan graf pangkat. Metode penelitian yang digunakan bersifat teoretis dengan pendekatan kajian pustaka dan analisis deduktif. Setiap graf dikonstruksi berdasarkan relasi antar elemen grup, kemudian derajat simpul ditentukan untuk menghitung nilai Indeks Sombor secara sistematis. Hasil penelitian menunjukkan adanya perbedaan karakteristik nilai Indeks Sombor yang bergantung pada sifat struktur grup yang digunakan, baik komutatif maupun non-komutatif. Selain itu, diperoleh pola umum yang dapat digunakan sebagai dasar untuk menganalisis keterkaitan antara struktur aljabar grup dan sifat topologis grafnya. Temuan ini diharapkan dapat memperkaya kajian energi graf dan indeks topologi dalam konteks teori graf aljabar.

Kata Kunci: Indeks Sombor; graf grup; graf koprima; graf non-koprima; graf unit; graf nilpoten; graf pangkat; grup hingga

1. PENDAHULUAN

Indeks topologi adalah salah satu bidang yang membahas mengenai struktur graf berdasarkan pada jarak dan derajat dari setiap simpul (Husni et al. 2024). Indeks topologi juga diartikan sebagai bilangan yang tidak berubah di bawah automorfisme graf. Hal ini menunjukkan deskriptor dua dimensi yang dapat dihitung dengan mudah dari grafik molekul. Indeks topologi tidak tergantung pada bagaimana grafik digambarkan atau diberi label, dan tidak memerlukan minimal energi untuk struktur kimia. Terdapat tiga klasifikasi utama indeks topologi, yaitu berbasis derajat, jarak, dan eksentrisitas (Gayatri et al., 2023). Indeks topologi digunakan dalam teori graf untuk menganalisis struktur molekul kimia, membantu memahami sifat-sifat dan hubungan antara atom-atom dalam molekul (Ningrum et al., 2024). Indeks topologi dalam matematika digunakan untuk mengukur dan membandingkan hubungan antar simpul, sehingga diperoleh karakteristik dan rumusan umum dari suatu graf. Berbagai jenis indeks topologi telah dikembangkan untuk menggambarkan karakteristik graf dari molekul dengan lebih akurat.

Salah satu di antaranya adalah Indeks Sombor, yang merupakan suatu indeks baru yang dikenalkan oleh Gutman pada tahun 2021. Indeks ini didefinisikan sebagai $SO(G) = \sum_{uv \in E(G)} \sqrt{d_u^2 + d_v^2}$, dimana d_u, d_v merupakan derajat dari simpul u dan v dalam graf G (Ali, 2021). Indeks Sombor merupakan salah satu invarian graf yang digunakan untuk memodelkan dan menganalisis struktur kimia pada tingkat molekuler. Graf aljabar merupakan suatu hal yang penting untuk diteliti lebih lanjut, karena keterkaitannya dengan kimia terletak pada kemampuannya untuk mengukur dan mengkarakterisasi sifat-sifat molekul berdasarkan struktur graf yang mewakili molekul tersebut (Gayatri et al., 2023). Indeks Sombor dapat digunakan untuk menilai stabilitas molekul, sehingga dapat menghasilkan suatu rumusan umum dari penemuan teorema yang kuat dalam graf berbasis grup. Dalam kimia teoritis dan komputasi, stabilitas molekul sering dikaitkan dengan topologi graf molekul tersebut. Indeks yang menghitung derajat dari hubungan simpul-simpul graf pada distribusi ikatan kimia yang mempengaruhi stabilitas keseluruhan molekul. Nilai indeks Sombor dapat mengidentifikasi kestabilan suatu molekul dibandingkan dengan menggunakan indeks yang lainnya (Shanmukha et al., 2022).

Terdapat beberapa penelitian sebelumnya tentang indeks topologi pada graf, berdasarkan penelitian dengan judul Indeks Topologi dari Graf Koprima untuk Grup Dihedral dengan Orde Pangkat Prima didapatkan beberapa hasil indeks topologi graf koprima dari grup dihedral. Beberapa hasil indeks topologi yang didapatkan yaitu: indeks Hyper-Wiener, Harary, Harmonik, Zagreb pertama, dan Gutman (Gayatri et al., 2023). Kemudian didapatkan jenis indeks topologi baru yang diperkenalkan oleh Gutman pada teori graf dalam kimia (Das et al., 2021). Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan pembaruan mengenai Indeks Sombor pada graf-graf yang dikontruksi dari grup hingga.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini bersifat teoretis dengan pendekatan kajian pustaka dan analisis matematis deduktif. Fokus utama penelitian adalah menentukan pola umum Indeks Sombor pada beberapa jenis graf yang dikonstruksi dari grup hingga, seperti graf koprima, graf non-koprima, graf unit, graf nilpoten, dan graf pangkat. Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi dan menganalisis secara visual mengenai struktur beberapa graf dari grup hingga. Sehingga diperoleh rumusan umum dari masing-masing graf untk memudahkan penelitian selanjutnya.

Langkah detail perhitungan penelitian diawali dengan pengumpulan referensi yang relevan mengenai teori grup, teori graf, dan konsep indeks topologi, khususnya Indeks Sombor. Selanjutnya dilakukan konstruksi graf berdasarkan elemen dan relasi keterhubungan dalam grup yang diteliti. Setelah struktur graf terbentuk, setiap simpul dianalisis untuk menentukan derajatnya sesuai dengan sifat-sifat grup yang bersangkutan. Nilai Indeks Sombor kemudian dihitung dengan menjumlahkan hasil perhitungan berbasis derajat simpul yang saling terhubung pada graf. Hasil perhitungan ini digunakan untuk menyusun pola umum dan membentuk teorema yang menggambarkan hubungan antara struktur grup dan nilai Indeks Sombor. Tahap akhir penelitian meliputi analisis konsistensi dan perbandingan hasil dengan studi terdahulu guna memastikan keabsahan rumus dan generalisasi yang diperoleh.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini menyajikan hasil analisis teoretis mengenai penerapan Indeks Sombor pada beberapa jenis graf yang dikonstruksi dari grup hingga. Pembahasan diawali dengan konstruksi setiap jenis graf berdasarkan relasi antar elemen grup, kemudian dilanjutkan dengan penentuan derajat simpul dan perhitungan nilai Indeks Sombor untuk masing-masing graf. Hasil perhitungan tersebut digunakan untuk mengidentifikasi pola umum yang menghubungkan sifat struktural grup dengan nilai Indeks Sombor yang dihasilkan. Setiap subbagian pada bagian ini membahas satu jenis graf secara sistematis, dimulai dari definisi, konstruksi graf, perhitungan derajat simpul, hingga penentuan nilai Indeks Sombor beserta interpretasinya. Melalui pendekatan ini, diperoleh pemahaman yang lebih mendalam tentang bagaimana struktur aljabar dari grup hingga memengaruhi karakteristik topologis graf yang merepresentasikannya.

Definisi 1 (Das et al., 2021)

Misalkan diberikan sebuah graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Maka, indeks sombor dari G yang dilambangkan dengan $SO(G)$ adalah:

$$SO(G) = \sum_{\{u,v\}\in E(G)} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2}$$

Definisi 2 (Das et al., 2021)

Derajat suatu simpul dalam graf sederhana adalah banyaknya sisi yang bertetangga dengan simpul tersebut, dilambangkan dengan $\deg(a)$ untuk simpul sembarang a.

3.1. Indeks Sombor pada graf koprima untuk grup dihedral

Setelah dijelaskan konsep graf yang dikonstruksi dari grup, langkah berikutnya adalah memperkenalkan jenis graf khusus yang menjadi fokus utama penelitian ini. Salah satu bentuk yang banyak dikaji dalam teori graf aljabar adalah graf koprima, di mana hubungan antar simpul ditentukan berdasarkan sifat koprimalitas dari orde elemen-elemen dalam grup. Konsep ini memungkinkan keterkaitan antara struktur aljabar dan sifat aritmetika elemen grup direpresentasikan secara visual melalui graf. Definisi berikut menyajikan pengertian formal dari graf koprima.

Definisi 3 (Gazir & Wardhana, 2019)

Misalkan G adalah suatu grup. Grup G dapat dikatakan sebagai grup dihedral berorde $2n, n \geq 3$ merupkan grup yang dibangun oleh dua elemen a, b dengan:

$$G = D_{2n} = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

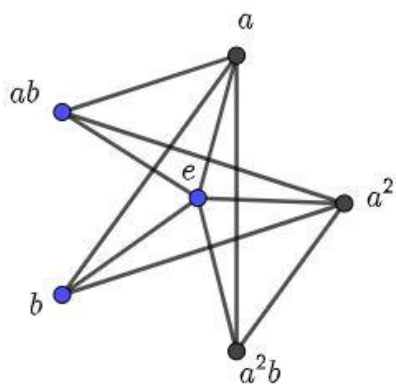
Elemen b adalah suatu elemen orde dua dan disebut sebagai elemen refleksi. Sedangkan elemen a yang memiliki orde lebih dari $n \geq 3$ disebut elemen rotasi. Orde grup dihedral D_{2n} adalah $2n$.

Definisi 4 (S et al., 2020)

Graf koprima dari grup G dilambangkan dengan Γ_G, merupkan graf yang simpul-simpulnya merupakan elemen dari G dan dua simpul berbeda u dan v bertetangga jika dan hanya jika $FPB\ (|a|, |b|) = 1$.

Setiap simpul akan dicari nilai ordonya terlebih dahulu, kemudian dua simpul akan dikatakan bertetangga jika dan hanya jika nilai FPB dari ordo kedua simpul bernilai 1. Jumlah hubungan antar simpul yang bertetangga pada sebuah graf dinamakan derajat simpul. Misalkan graf koprima untuk grup dihedral, dengan $n = 3$. Didapatkan hasil derajat setiap simpul dalam tabel berikut.

	$\lvert e\rvert$	$\lvert a\rvert$	$\lvert a^2\rvert$	$\lvert b\rvert$	$\lvert ab\rvert$	$\lvert a^2b\rvert$
$\lvert e\rvert$	0	1	1	1	1	1
$\lvert a\rvert$	1	0	3	1	1	1
$\lvert a^2\rvert$	1	3	0	1	1	1
$\lvert b\rvert$	1	1	1	0	2	2
$\lvert ab\rvert$	1	1	1	2	0	2
$\lvert a^2b\rvert$	1	1	1	2	2	0



Gambar 1. Graf Koprima untuk Grup Dihedral

Berdasarkan gambar diatas, dengan $n = 3^1$ didapatkan hasil indeks sombor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
SO(G) &= \sum_{\{uv\}\in E(G)} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} \\
&= \sqrt{5^2+4^2} + \sqrt{5^2+4^2} + \sqrt{5^2+3^2} + \sqrt{5^2+3^2} + \sqrt{5^2+3^2} + \sqrt{4^2+3^2} \\
&\quad + \sqrt{4^2+3^2} + \sqrt{4^2+3^2} + \sqrt{4^2+3^2} + \sqrt{4^2+3^2} + \sqrt{4^2+3^2} \\
&= \sqrt{41} + \sqrt{41} + \sqrt{34} + \sqrt{34} + \sqrt{34} + \sqrt{25} + \sqrt{25} + \sqrt{25} + \sqrt{25} + \sqrt{25} + \sqrt{25} \\
SO(G) &= 2\sqrt{41} + 3\sqrt{34} + 30
\end{aligned}$$

Jadi, nilai indeks sombor dari graf koprima untuk grup dihedral $D_{2\cdot(3^1)}$ adalah $2\sqrt{41} + 3\sqrt{34} + 30$.

Teorema 3.1.1 (Putri et al., 2024)
Misalkan D_{2n} adalah grup dihedral dengan $n = p^k$, dengan p merupakan bilangan prima ganjil dan $k \in \mathbb{N}$. Maka, indeks sombor dari graf koprima untuk grup dihedral dapat dituliskan sebagai berikut:

$$SO(\Gamma_{D_{2n}}) = (n-1)\sqrt{(2n-1)^2+(n+1)^2}+(n)\sqrt{(2n-1)^2+n^2} + n(n-1)\sqrt{(n+1)^2+n^2}$$

Bukti

$$SO(G) = \sum_{\{uv\}\in E(G)} \sqrt{\deg(u)^2+\deg(v)^2}$$

Himpunan simpul pada grup dihedral terbagi menjadi 3, yaitu: $\{e\} = V_0$, $\{a, a^2, a^3, \dots, a^{(i)}\} = V_1$, dan $\{b, ab, a^2b, \dots, a^{(j)}b\} = V_2$. Berdasarkan sifat pada jurnal (Putri et al., 2024) , didapatkan rumus umum untuk derajat setiap simpul sebagai berikut:

1. $\deg e = 2n-1$
2. $\deg a^{(i)} = n+1, i = \{1,2,3, \dots, (n-1)\}$.
3. $\deg a^{(j)}b = n, j = \{0, 1,2, \dots, (n-1)\}$

Banyak sisi yang terbentuk dari $ev_1 = n-1$, $ev_2 = n$, dan $v_1v_2 = n(n-1)$. Kemudian substitusi rumus umum untuk derajat setiap simpul, sehingga didapatkan hasil:

$$\begin{aligned} SO(G) &= \sum_{ev_1\in E}\sqrt{\deg(e)^2+\deg(v_1)^2} + \sum_{ev_2\in E}\sqrt{\deg(e)^2+\deg(v_2)^2} \\ &\quad + \sum_{v_1v_2\in E}\sqrt{\deg(v_1)^2+\deg(v_2)^2} \\ &= (n-1)\sqrt{\deg(e)^2+\deg(v_1)^2} + n\sqrt{\deg(e)^2+\deg(v_2)^2} \\ &\quad + ((n-1).n)\sqrt{\deg(v_1)^2+\deg(v_2)^2} \\ &= (n-1)\sqrt{(2n-1)^2+(n+1)^2}+(n)\sqrt{(2n-1)^2+n^2} \\ &\quad + n(n-1)\sqrt{(n+1)^2+n^2} \end{aligned}$$

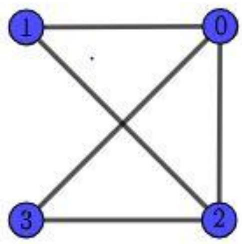
Dengan pembuktian tersebut, bentuk umum Indeks Sombor dapat digunakan sebagai dasar untuk analisis topologi graf berikutnya.

3.2. Indeks Sombor pada graf nilpoten

Jenis graf lain yang dapat dikonstruksi dari struktur grup adalah graf unit. Pada graf ini, keterhubungan antar simpul tidak ditentukan oleh koprimalitas orde, melainkan oleh sifat keberbalikan elemen terhadap operasi grup. Dengan demikian, graf unit merepresentasikan hubungan antara elemen-elemen yang memiliki invers dalam gelanggang atau grup tertentu. Konsep ini penting karena menghubungkan teori graf dengan struktur aljabar yang lebih luas, khususnya konsep elemen unit dalam teori gelanggang. Definisi berikut menjelaskan secara formal konsep graf unit.

Definisi 5 (Malik et al., 2023)
Suatu elemen x dalam sebuah gelanggang R dapat dikatakan nilpoten jika $x^r = 0$, untuk $r \in \mathbb{N}$. Himpunan semua elemen nilpoten dari gelanggang R dilambangkan dengan $N(R)$.

Definis 6 (Malik et al., 2023)
Graf nilpoten dari gelanggang R, dilambangkan dengan Γ_R, adalah sebuah graf dengan himpunan simpul terdiri atas semua elemen dari gelanggang R. Dua simpul berbeda u dan v dikatakan bertetangga jika $u, v \in N(R)$.



Gambar 2. Graf Nilpoten

Berdasarkan gambar diatas, dengan $n = 2^2$ didapatkan hasil indeks sombor sebagai berikut:

$$SO(G) = \sum_{\{uv\} \in E(G)} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2}$$
$$= 4\sqrt{3^2 + 2^2} + \sqrt{3^2 + 3^2}$$
$$= 4\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$$

Jadi, nilai indeks Sombor dari graf nilpoten $\mathbb{Z}_{2^2}$ adalah $4\sqrt{13} + 3\sqrt{2}$.

Teorema 3.2.1 (Wahidah et al., 2024)
Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah graf nilpoten dari ring $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = 2^k$ dengan k adalah bilangan asli, maka indeks sombor dari graf nilpoten dapat dituliskan sebagai berikut:

$$SO(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = (2^{2k-2})\sqrt{2^{2k-2} + (2^k - 1)^2} + \sqrt{2}(2^{k-1})(2^k - 2)(2^k - 1)$$

Bukti
Diberikan graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$dengan $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Kita membagi graf $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$menjadi dua bagian (partisi): $V_1 = \{1,3,5, \dots ,2k - 1\}$ dan $V_2 = \{0,2,4, \dots ,2k - 2\}$. Perhatikan bahwa V_1 memuat semua elemen non-nilpoten, sedangkan V_2 memuat semua elemen nilpoten, dan himpunan ini membentuk subgraf lengkap. Karena setiap elemen non-nilpoten bertetangga dengan semua elemen nilpoten, dan tidak bertetangga dengan elemen non-nilpoten lainnya, maka:

$$\deg(u) = \frac{n}{2}, \text{untuk } u \in V_1.$$

Selanjutnya, karena setiap elemen nilpoten bertetangga dengan semua elemen lainnya, maka:

$$\deg(v) = n - 1, \text{untuk } v \in V_2.$$

Sehingga didapatkan hasil sebagai berikut:

$$SO(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (n-1)^2} + \left(\frac{n(n-2)}{2}\right)\sqrt{(n-1)^2 + (n-1^2)}$$
$$= \left(2^{2k-2}\right)\sqrt{2^{2k-2} + (2^k - 1)^2} + \sqrt{2}\left(2^{k-1}\right)\left(2^k - 2\right)\left(2^k - 1\right)$$

Berdasarkan pembuktian diatas, bentuk umum Indeks Sombor dapat dijadikan sebagai dasar dalam melakukan analisis topologi graf pada penelitian selanjutnya.

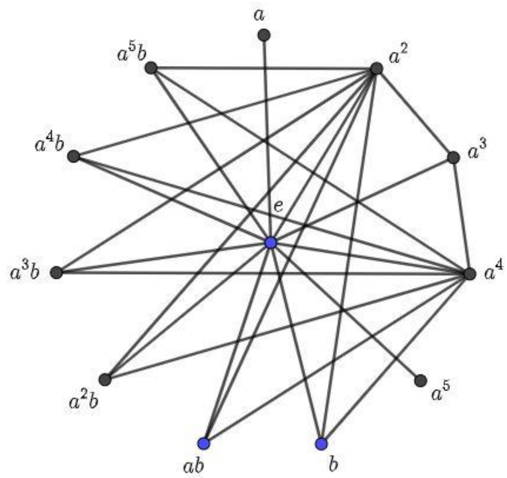
3.3. Indeks Sombor pada graf koprima untuk grup quarternion

Selain graf nilpoten, jenis lain yang juga menarik untuk dikaji adalah graf koprima untuk grup quarternion (Q_{4n}). Dengan memetakan setiap elemen ke dalam simpul graf berdasarkan sifat orde yang saling prima, sehingga diperoleh struktur graf yang kongkrit. Penerapan Indeks Sombor kemudian berfungsi sebagai alat kuantitatif untuk menerjemahkan kompleksitas simetri aljabar tersebut menjadi nilai numerik topologi yang khas.

Definsi 7 (N. Nurhabibah, I.G.A.W. Wardhana, 2023)
Grup quaternion (Q_{4n}) dengan $n \geq 2$ adalah grup berordo $4n$ yang dibentuk oleh elemen-elemen a dan b, yang dinotasikan sebagai berikut:

$$\langle a, b \mid a^{2n} = e, b^4 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

Definsi 8 (Zahidah & Mahanani, 2022)
Misalkan G adalah suatu grup hingga. Graf koprima dari grup G, dinotasikan dengan Γ_G, adalah graf dengan himpunan simpul yang terdiri atas semua elemen dari G. Dua simpul berbeda x dan y dikatakan bertetangga jika dan hanya jika $FPB\ (\mid x \mid, \mid y \mid) = 1$, dimana $\mid x \mid$ dan $\mid y \mid$ menyatakan orde dari elemen $x$dan y.



Gambar 3. Graf Koprima untuk Grup Quarternion

Berdasarkan gambar diatas, dengan $n = 3^1$ didapatkan hasil indeks sombor sebagai berikut:

$$SO(G) = \sum_{\{uv\}\in E(G)} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2}$$

$$= 2\sqrt{(11)^2 + (1)^2} + 2\sqrt{(11)^2 + (8)^2} + 7\sqrt{(11)^2 + (3)^2} + 14\sqrt{(8)^2 + (3)^2}$$

$$= 2\sqrt{122} + 2\sqrt{185} + 7\sqrt{130} + 14\sqrt{73}$$

Jadi, nilai indeks Sombor dari graf koprima untuk grup quarternion $Q_{4.(3^1)}$ adalah $2\sqrt{122} + 2\sqrt{185} + 7\sqrt{130} + 14\sqrt{73}$.

Teorema 3.3.1 (Siboro et al., 2024)

Diberikan Q_{4n} adalah grup quarternion bilangan bulat modulo n dan $\Gamma_{Q_{4n}}$ adalah graf koprima dari grup Q_{4n}. Jika $n = 2^k$ dengan k adalah bilangan asli, maka indeks sombor dari $\Gamma_{Q_{4n}}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$SO(\Gamma_{Q_{4n}}) = (4n - 1)\sqrt{16n^2 - 8n + 2}$$

Bukti

Karena graf tersebut merupakan graf bintang dengan pusat di e, maka derajat titik pusatnya adalah

$$\deg(e) = 4n - 1,$$

dan untuk setiap titik $x \in V(G)$dengan $x \neq e$, diperoleh

$$\deg(x) = 1.$$

Sehingga, didapatkan hasil sebagai berikut:

$$SO(\Gamma_{Q_{4n}}) = \sum_{\{u,v\}\in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2}$$

$$= \sqrt{(4n-1)^2 + (1)^2} + \cdots + \sqrt{(4n-1)^2 + (1)^2}$$
$$= (4n-1)\sqrt{16n^2 - 8n + 2}$$

Hasil pembuktian tersebut menunjukkan bahwa bentuk umum Indeks Sombor dapat digunakan sebagai acuan dalam pengembangan analisis topologi graf lebih lanjut.

3.4. Indeks Sombor pada graf non-koprima untuk grup dihedral

Dalam upaya untuk memperkaya karakterisasi aljabar, penelitian ini menentukan nilai Indeks Sombor untuk graf non-koprima dari grup dihedral (D_{2n}). Perhitungan Indeks Sombor memberikan invarian numerik yang menarik. Nilainya mencerminkan secara langsung struktur kompleks dari orde elemen dalam (D_{2n}) yang saling bertetangga, sehingga dapat dijadikan deskriptor topologi untuk graf yang berbasis grup.

Definisi 9 (Mansoori et al., 2016)
Graf non-koprima dari grup H, yang dinotasikan dengan $\overline{\Gamma}_H$ adalah graf dengan simpul-simpul yang terdiri dari $\overline{H} = H - \{e\}$ dan dua simpul yang berbeda $u, v \in H$ saling bertetangga jika dan hanya jika $FPB\ (|u|, |v|) \neq 1$.

Teorema 3.4.1 (Aulia et al., 2023)
Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ merupakan sebuah graf lengkap.

Teorema 3.4.2 (Wahidah et al., 2025)
Diberikan $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ graf non-koprima dari grup dihedral D_{2n}. Jika $n = 2^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, maka indeks sombor dari $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

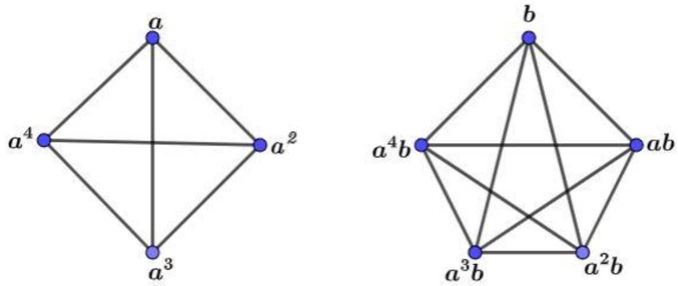
$$SO\left(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}\right) = (n-1)(2n-1)(2n-2)\sqrt{2}$$

Bukti
Berdasarkan teorema 3.4.1 $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ merupakan graf lengkap K_{2n-1}, maka $\forall x \in V\left(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}\right)$. Derajat dari x Adalah $\deg(x) = 2n - 2$, selanjutnya banyak sisi yang terbentuk dari $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ Adalah $\binom{2n-1}{2}$. Sehingga indeks sombor dari graf non-koprima pada grup dihedral untuk $n = 2^k$ sebagai berikut:

$$SO\left(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}\right) = \binom{2n-1}{2}\sqrt{(2n-2)^2 + (2n-2)^2}$$
$$= \frac{(2n-1)(2n-2)}{2}\sqrt{2(2n-2)^2}$$
$$= (n-1)(2n-1)(2n-2)\sqrt{2}$$

Teorema 3.4.3 (Aulia et al., 2023)
Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dan p merupakan bilangan prima ganjil. Diperoleh $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ dapat terdiri dari dua subgraf lengkap yang tak terhubung.

Misalkan graf non-koprima dari grup dihedral dengan $n = 5$, maka betuk graf non-koprima dari grup dihedral D_{10} adalah kombinasi dari dua subgraf lengkap $K_4 \cup K_5$.



Gambar 4. Graf non-koprima dari grup dihedral D_{10} $\left(\overline{\Gamma_{10}}\right)$

Teorema 3.4.4 (Wahidah et al., 2025)
Diberikan $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ graf non-koprima dari grup dihedral D_{2n}. Jika $n = p^k$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dan p adalah bilangan prima ganjil, maka indeks sombor dari $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$SO\left(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}\right) = \frac{(n-1)(n-2)^2 + n(n-1)^2}{2}\sqrt{2}$$

Bukti
Berdasarkan teorema 3.4.3 $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ terpartisi menjadi dua subgraf lengkap yang tak terhubung. Akibatnya simpul pada $\overline{\Gamma_{D_{2n}}}$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan simpul. Misalkan $V_1 = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}\}$ dan $V_2 = \{b, ab, a^2b, a^3b, \dots, a^{n-1}b\}$, dengan V_1 merupakan kumpulan elemen rotasi dan V_2 merupakan kumpulan elemen refleksi. Karena V_1 membentuk subgraf lengkap, maka $\deg(u_i) = n - 2, u_i \in V_1$ dengan $i = 1,2,,3, \dots, n-1$. Selanjutnya karena V_2 membentuk subgraf lengkap, maka $\deg(v_i) = n - 1, v_i \in V_2$ dengan $i = 1,2,3, \dots, n$. Sehingga indeks sombor dari graf non-koprima pada grup dihedral untuk $n = p^k$ sebagai berikut:

$$SO\left(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}\right) = \sum_{\substack{(u_i,u_j)\in E\left(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}\right) \\ u_i,u_j \in V_1 \\ i,j=1,2,\dots,n \\ i \neq j}} \sqrt{\deg(u_i)^2 + \deg(u_j)^2} + \sum_{\substack{(v_i,v_j)\in E\left(\overline{\Gamma_{D_{2n}}}\right) \\ v_i,v_j \in V_2 \\ i,j=1,2,\dots,n \\ i \neq j}} \sqrt{\deg(v_i)^2 + \deg(v_j)^2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)^2}{2}\sqrt{2} + \frac{n(n-1)^2}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)^2 + n(n-1)^2}{2}\sqrt{2}$$

Berdasarkan pembuktian diatas, diperoleh bentuk umum Indeks Sombor yang dapat dimanfaatkan sebagai landasan awal untuk menganalisis topologi graf pada penelitian berikutnya.

3.5. Indeks Sombor pada graf unit

Selain berbagai graf yang telah dibahas sebelumnya, penelitian ini juga meninjau graf unit. Pada graf unit, simpul-simpulnya merepresentasikan elemen-elemen suatu cincin, dan dua simpul dihubungkan jika jumlah keduanya merupakan elemen satuan. Nilai Indeks Sombor dihitung dari akar jumlah kuadrat derajat pasangan simpul yang terhubung, sehingga mencerminkan tingkat keterhubungan dan kompleksitas struktur graf unit tersebut.

Definisi 10

Graf unit dari R dinotasikan dengan $G(R)$, memiliki himpunan simpul yang sama dengan himpunan semua elemen R. Simpul yang berbeda x dan y bertetangga jika dan hanya jika $x + y$ adalah unit dari R.

Teorema 3.5.1 (Pradana et al., 2025)

Misalkan $\mathbb{Z}_n$ adalah suatu ring bilangan bulat modulo dengan orde $n = 2^k$. Maka, graf unit $G(\mathbb{Z}_n)$ adalah sebuah graf bipartit lengkap.

Teorema 3.5.2 (Pradana et al., 2025)

Diberikan $G(\mathbb{Z}_n)$ adalah suatu graf unit dari $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = 2^k$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka indeks sombor dari suatu graf unit untuk $n = 2^k$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$G(\mathbb{Z}_n) = \left(2^{k-1}\right)^3\sqrt{2}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 3.5.1 $G(\mathbb{Z}_n)$ suatu graf bipartit lengkap. Kemudian Lestari, et all menemukan bahwa terdapat $e_1, e_2 \in E$, dan semua simpul di V_1 bertetangga dengan semua simpul di V_2 dimana $V_1, V_2 \subset V$. Sehingga didapatkan suatu hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} SO\big(G(R)\big) &= \left(2^{k-1}\right)^2\sqrt{(2^{k-1})^2 + (2^{k-1})^2} \\ &= \left(2^{k-1}\right)^2\sqrt{2(2^{k-1})^2} \\ &= \left(2^{k-1}\right)^3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Teorema 3.5.3 (Pradana et al., 2025)

Misalkan $\mathbb{Z}_n$ adalah suatu ring bilangan bulat modulo dengan orde $n = p$, p adalah bilangan prima ganjil. Maka, graf unit $G(\mathbb{Z}_n)$ adalah sebuah $\frac{n+1}{2}$ −graf partit.

Teorema 3.5.4 (Pradana et al., 2025)
Diberikan $G(\mathbb{Z}_n)$ adalah sebuah graf unit dari $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p$ untuk setiap n adalah bilangan prima gajil, maka indeks sombor dari suatu graf unit untuk $n = p$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$G(\mathbb{Z}_n) = (n-1)\sqrt{n^2 + (n-1)(n-5)} + \frac{1}{2}\sqrt{2}(n-3)(n-1)(n-2)$$

Bukti
Berdasarkan teorema 3.5.3 $G(\mathbb{Z}_n)$ adalah sebuah $\frac{n+1}{2}$ −graf partit dengan n bilangan prima ganjil. Kemudian Lestari, et all menemukan bahwa terdapat $e_1, e_2 \in E$, dimana semua simpul bertetangga dan tidak ada sisi di dalam sebuah partisi. Sehingga didapatkan suatu hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} SO\big(G(R)\big) &= (n-1)\sqrt{2n^2 - 6n + 5} + \frac{1}{2}(n-3)(n-1)\sqrt{2(n-2)^2} \\ &= (n-1)\sqrt{n^2 + n^2 - 6n + 5} + \frac{1}{2}(n-3)(n-1)(n-2)\sqrt{2} \\ &= (n-1)\sqrt{n^2 + (n-1)(n-5)} + \frac{1}{2}\sqrt{2}(n-3)(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

Hasil pembuktian tersebut menegaskan bahwa bentuk umum Indeks Sombor memiliki peran penting sebagai acuan dalam pengembangan analisis topologi graf pada penelitian selanjutnya.

3.6. Indeks Sombor pada graf pangkat

Pada graf pangkat, simpul-simpul merepresentasikan elemen-elemen dari suatu grup, dan dua simpul dihubungkan apabila salah satu merupakan pangkat dari yang lain. Nilai Indeks Sombor pada graf pangkat memberikan informasi mengenai tingkat keterhubungan antar elemen serta mencerminkan kompleksitas struktur graf yang terbentuk dari hubungan pangkat dalam grup tersebut.

Definisi 11 (Asmarani et al., 2023)
Graf pangkat dari sebuah grup H didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnya adalah semua elemen dari grup H. Terdapat dua simpul berbeda v_1 dan v_2 bertetangga jika dan hanya jika $(v_1)^x = v_2$ atau $(v_2)^y = v_1$, untuk suatu bilangan asli x dan y.

Teorema 3.6.1 (Putra, L. R. W., Awanis, Z. Y., Salwa, S., Aini, Q., & Wardhana, 2023)

Jika $\mathbb{Z}_n$ adalah grup bilangan bulat modulo dengan $n = q^k$ dimana $k \in \mathbb{N}$ dan q adalah bilangan prima, maka graf pangkat dari grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ dapat dinotasikan dengan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ berbentuk sebuah graf lengkap (K_n).

Teorema 3.6.2 (Yuniartika et al., 2021)
Jika D_{2n} dengan $n = p^k$, dimana $k \in \mathbb{N}$ dan p adalah bilangan prima. Maka graf pangkat dari grup dihedral memiliki dua subgraf, yaitu graf lengkap dan graf bintang.

Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya terhubung dari satu sisi ke semua simpul lainnya. Dapat dikatakan juga bahwa setiap simpulnya bertetangga. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada sebuah graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n-1)/2$ sisi (Adiwijaya, 2016).

Sedangkan graf bintang dinotasikan dengan S_n untuk $n \geq 3$, merupakan graf terhubung sederhana yang satu simpulnya berderajat n sedangkan simpul yang lainnya berderajat satu. Jumlah sisi pada graf bintang adalah n sisi dan memiliki banyak simpul $n + 1$ (Hartiansyah et al., 2023).

Berdasarkan teorema 3.6.1, derajat dari simpul-simpul dalam grup bilangan bulat modulo.

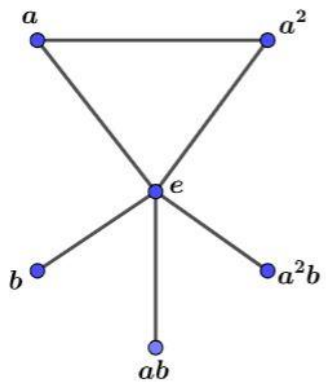
Teorema 3.6.3 (Putra, L. R. W., Awanis, Z. Y., Salwa, S., Aini, Q., & Wardhana, 2023)
Derajat simpul dari graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo dengan $n = p^k$, p bilangan prima, adalah:

$$\deg(a) = n - 1, \forall a \in \mathbb{Z}_n$$

Berdasarkan teorema 3.6.2, derajat dari simpul-simpul dalam grup dihedral.
Teorema 3.6.4 (Yuniartika et al., 2021)
Derajat simpul dari graf pangkat pada grup dihedral D_{2n}, dengan $n = p^k$ dan p bilangan prima, adalah:

a. $\deg(e) = 2n - 1$
b. $\deg\left(a^i b\right) = 1, \forall i \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n \; 0 \leq i \leq n - 1$
c. $\deg\left(a^j\right) = n - 1, \forall j \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n \; 1 \leq j \leq n - 1$

Misalkan diberikan $p = 3$ dan $k = 1$, sehingga didapatkan nilai $n = 3^1$ untuk grup dihedral. Maka diperoleh struktur graf sebagai berikut:



Gambar 5. Graf Pangkat dari grup dihedral D_6

Teorema 3.6.5 (Pratama et al., 2024)
Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf pangkat dari grup bilangan bulat modulo $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi $+_{mod(n)}$. Jika n merupakan bilangan berpangkat prima, maka indeks sombor dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$SO(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{\sqrt{2}n(n-1)^2}{2}$$

Bukti
Diketahui grup bilangan bulat modulo $n(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$, berdasarkan teorema 3.6.3, diperoleh bahwa

$$\deg(a) = n-1, \forall a \in V(G)$$

maka,

$$\begin{aligned} SO(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) &= \sum_{\{u,v\} \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2} \\ &= \sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} + \cdots + \sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} \\ &= \sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} + \sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} + \cdots + \sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 3.6.1, terdapat sisi ganda $\binom{n}{2}$

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{2}\sqrt{(n-1)^2 + (n-1)^2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,2!}\sqrt{2(n-1)^2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2}(n-1)\sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}n(n-1)^2}{2} \end{aligned}$$

Teorema 3.6.6 (Pratama et al., 2024)
Diberikan $\Gamma_{D_{2n}}$ graf pangkat dari grup dihedral D_{2n}. Jika n merupakan bilangan berpangkat prima, maka indeks sombor dari $\Gamma_{D_{2n}}$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$SO(\Gamma_{D_{2n}}) = (n-1)\sqrt{5n^2-6n+2} + \frac{(n-1)^2(n-2)\sqrt{2}}{2} + n\sqrt{4n^2-4n+2}$$

Bukti
Berdasarkan teorema 3.6.2, graf pangkat dari grup dihedral terbentuk atas dua subgraf, yaitu graf lengkap dan graf bintang. Berdasarkan teorema 3.6.4, diperoleh tiga bentuk perumuman dari $\deg(e), \deg(a^i b)$, dan $\deg(a^j)$.
Oleh karena itu, perhitungannya dibagi menjadi tiga kasus, yaitu:

a. Ketika e bertetangga dengan a^j
b. Ketika a bertetangga dengan $a^{j-1}, 3 \leq j \leq n$
c. Ketika e bertetangga dengan $a^i b, 0 \leq i \leq n-1$

Maka, didapatkan:

$$SO(\Gamma_{D_{2n}}) = (n-1)\sqrt{5n^2-6n+2} + \frac{(n-1)^2(n-2)\sqrt{2}}{2} + n\sqrt{4n^2-4n+2}$$

Hasil ini memperlihatkan bahwa rumus umum Indeks Sombor dapat digunakan sebagai kerangka dasar dalam studi lanjutan mengenai sifat-sifat topologis graf.

4. SIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa Indeks Sombor dengan rumusan umum $SO(G) = \sum_{\{u,v\}\in E(G)} \sqrt{\deg(u)^2 + \deg(v)^2}$ dapat digunakan untuk mengungkap karakteristik struktural dari berbagai jenis graf yang dikonstruksi dengan batas penelitian pada grup hingga. Melalui analisis yang telah dilakukan diperoleh pola umum yang menggambarkan hubungan antar sifat aljabar suatu grup dan nilai Indeks Sombor yang dihasilkan terhadap graf koprima, graf non-koprima, graf unit, graf nilpoten, dan graf pangkat. Nilai indeks yang berbeda pada setiap jenis graf menegaskan bahwa variasi struktur grup, baik komutatif maupun non-komutatif berpengaruh langsung terhadap kompleksitas topologinya. Hasil ini memperkuat peran Indeks Sombor sebagai alat analisis topologis yang efektif dalam kajian graf berbasis grup, sekaligus membuka peluang penelitian lanjutan untuk mengeksplorasi hubungan antara indeks topologi lainnya dengan sifat-sifat aljabar dari berbagai grup.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Mataram atas dukungan dan fasilitas yang diberikan selama proses penelitian ini. Ucapan terima kasih juga disampaikan kepada para dosen pembimbing dan rekan sejawat di lingkungan akademik yang telah memberikan masukan berharga dalam penyusunan artikel ini. Dukungan tersebut berperan penting dalam terselesaikannya penelitian mengenai penerapan Indeks Sombor pada graf yang dibangun dari grup hingga.

6. REKOMENDASI

Penelitian ini masih berfokus pada analisis teoretis Indeks Sombor untuk beberapa jenis graf yang dibangun dari grup hingga. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya disarankan untuk memperluas kajian terhadap indeks topologi lain, seperti Indeks Sombor Tereduksi, Indeks Sombor Rata-Rata, Indeks Gutman, dan Indeks Szeged, agar diperoleh perbandingan yang lebih komprehensif antar karakteristik graf. Selain itu, analisis dapat diperluas pada kelas grup lain, seperti grup simetri, grup permutasi, atau grup tak hingga dengan orde terbatas pada subgrup tertentu. Pendekatan komputasional juga dapat diterapkan untuk memverifikasi pola dan hubungan yang diperoleh secara analitik, terutama dengan bantuan perangkat lunak simbolik. Dengan demikian, penelitian lanjutan diharapkan mampu memperkaya pemahaman tentang keterkaitan antara struktur aljabar dan sifat topologis graf dalam konteks teori graf aljabar modern.

7. REFERENSI

Adiwijaya. (2016). Matematika Diskrit dan Aplikasinya. In *Alfabeta*. Sekolah Tinggi Teknologi Telkom.

Ali, A. (2021). On the Sombor index of graphs. *Contributions to Mathematics*, *3*, 11–18. https://doi.org/10.47443/cm.2021.0006

Asmarani, E. Y., Lestari, S. T., Purnamasari, D., & Gazir, A. (2023). *The First Zagreb Index , The Wiener Index , and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group*. *7*(4), 513–520.

Das, K. C., Çevik, A. S., Cangul, I. N., & Shang, Y. (2021). On sombor index. *Symmetry*, *13*(1), 1–12. https://doi.org/10.3390/sym13010140

Gayatri, M. R., Fadhilah, R., Lestari, S. T., Pratiwi, L. F., Abdurahim, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). Topology Index of the Coprime Graph for Dihedral Group of Prime Power Order. *Jurnal Diferensial*, *5*(2), 126–134. https://doi.org/10.35508/jd.v5i2.12462

Gazir, A., & Wardhana, I. G. A. W. (2019). Subgrup Non Trivial Dari Grup Dihedral. *EIGEN MATHEMATICS JOURNAL*, *1*(2), 73–76. https://doi.org/10.29303/emj.v1i2.26

Hartiansyah, F. R., Sains, I., Teknologi, I., & Nopember, S. (2023). *Bilangan Kromatik Lokasi pada Graf Hasil Amalgamasi Sisi dari Graf Bintang dan Graf Lengkap*. *8*(2). https://doi.org/10.31102/zeta.2023.8.2.66-70

Malik, D. P., Adhitya, I. G., Wardhana, W., Dewi, P. K., Widiastuti, R. S., Maulana, F., Syarifudin, A. G., & Awanis, Y. (2023). *Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima*. *8*(1), 28–33.

Mansoori, F., Erfanian, A., & Tolue, B. (2016). Non-coprime graph of a finite group. *AIP Conference Proceedings*, *1750*. https://doi.org/10.1063/1.4954605

N. Nurhabibah, I.G.A.W. Wardhana, N. W. S. (2023). *NUMERICAL INVARIANTS OF COPRIME GRAPH OF A GENERALIZED QUATERNION GROUP*. *29*(01), 36–44.

Ningrum, S. H. P., Siboro, A. M., Lestari, S. T., Wardhana, I. G. A. W., & Awanis, Z. Y. (2024). Abstraksi Chemical Topological Graph (Ctg) Melalui Indeks Topologis Graf Aljabar.

Prosiding SAINTEK, *6*(November 2023), 92–100. https://doi.org/10.29303/saintek.v6i1.923

Pradana, S., Wardhana, I. G. A. W., & Satriyantara, R. (2025). Gutman, Sombor, and Harmonic Indices of Unit Graphs in The Integer Ring Modulo with A Specific Order. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *21*(3), 725–738. https://doi.org/10.20956/j.v21i3.43144

Pratama, R. B., Maulana, F., Hijriati, N., & Wardhana, I. G. A. W. (2024). Sombor Index and Its Generalization of Power Graph of Some Group With Prime Power Order. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, *7*(2), 163–173. https://doi.org/10.14710/jfma.v7i2.22552

Putra, L. R. W., Awanis, Z. Y., Salwa, S., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W. (2023). THE POWER GRAPH REPRESENTATION FOR INTEGER MODULO GROUP WITH POWER PRIME ORDER. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *17*(3), 1393–1400.

Putri, S., Maulana, F., Hijriati, N., & Wardhana, I. G. A. W. (2024). Sombor Index, Reduced Sombor Index, and Average Sombor Index of Coprime Graph Associated to the Dihedral Groups of Order 2n. *Proceedings of Science and Mathematics*, *October*, 85–93. https://science.utm.my/procscimath/Volume26

S, A. G., Adhitya, I. G., Wardhana, W., Switrayni, N. W., & Aini, Q. (2020). *Some Properties of Coprime Graph of Dihedral Group D 2 n When n is a prime power*. 34–38.

Shanmukha, M. C., Usha, A., Praveen, B. M., & Douhadji, A. (2022). Degree-Based Molecular Descriptors and QSPR Analysis of Breast Cancer Drugs. *Journal of Mathematics*, *2022*. https://doi.org/10.1155/2022/5880011

Siboro, A. M., Maulana, F., Hijriati, N., & Wardhana, I. G. A. W. (2024). The Sombor Index and Its Generalization of The Coprime Graph for the Generalized Quaternion Group. *Proceedings of Science and Mathematics*, *26*, 65–70. https://science.utm.my/procscimath/

Wahidah, F. M., Hijriati, N., & Wardhana, I. (2025). *Indeks Sombor, Indeks Sombor Tereduksi, dan Indeks Sombor Rata-Rata dari Graf Non-Koprima Pada Grup Dihedral*. *9*(1), 16–25.

Wahidah, F. M., Maulana, F., Hijriati, imah, & Wardana, I. G. A. W. (2024). The Sombor Index of the Nilpotent Graph of Modulo Integer Numbers. *Proceedings of Science and Mathematics*, *26*, 48–52. https://science.utm.my/procscimath/Volume26

Yuniartika, E., Gazir, A., Adhitya, I. G., & Wardhana, W. (2021). *The Power Graph of a Dihedral Group*. *4*(2).

Zahidah, S., & Mahanani, D. M. (2022). *Connectivity Indices of Coprime Graph of Generalized Quarternion Group*. *February*. https://doi.org/10.22342/jims.27.3.1043.285-296