Mandalika Mathematics and Education Journal
Volume 8 Nomor 1, Maret 2026
e-ISSN 2715-1190| |p-ISSN 2715-8292
DOI: http://dx.doi.org/ 10.29303/jm.v8i1.11446

Analisis kemampuan pembuktian matematis masalah bilangan pada mahasiswa calon guru matematika

Sri Subarinah[1]*, Sudi Prayitno[1], Tabita Wahyu Triutami[1], Nilza Humaira Salsabila[1], Krisna Jivani Dasusmi[2]

[1] *Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram, Mataram*
[1] *Mahasiswa Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram, Mataram*

srisubarinah.fkip@unram.ac.id

Abstract
This study aims to explore the proof ability of prospective mathematics teacher students in number problems reviewed based on the proof method. This study is necessary because the ability to reason in proof is an important competency that prospective mathematics teacher students must have. This type of research is a combination of quantitative and qualitative with a case study approach, namely research that intends to understand the phenomenon of what is experienced by the research subject holistically and naturally. The results of the study provide an overview of the reasoning used by students in proving number problems, the errors found are as follows: (1) In proofs by mathematical induction, carrying out inappropriate algebraic manipulations and reasoning errors involving natural numbers, (2) Indirect proofs by direct proofs by inappropriate reasoning, (3) Indirect proofs (by contradiction), conceptual errors in indirect proofs and reasoning errors.

Keywords: proof ability; number problems; proof methods

Abstrak
Penelitian ini bertujuan mengeksplorasi kemampuan pembuktian mahasiswa calon guru matematika dalam masalah bilangan ditinjau berdasarkan metode pembuktiannya. Penelitian ini diperlukan karena kemampuan penalaran dalam pembuktian merupakan kompetensi penting yang harus dimiliki mahasiswa calon guru matematika. Jenis penelitian ini adalah gabungan kuantitatif dan kualitatif dengan pendekatan studi kasus, yaitu penelitian yang bermaksud untuk memahami fenomena tentang apa yang dialami oleh subjek penelitian secara holistik dan alamiah. Hasil penelitian memberikan gambaran mengenai penalaran yang digunakan mahasiswa dalam melakukan pembuktian masalah bilangan, kesalahan yang ditemukan adalah sebagai berikut: (1) Pada pembuktian dengan induksi matematika, melakukan manipulasi aljabar yang tidak tepat dan kesalahan penalaran yang melibatkan bilangan asli, (2) Pada pembuktian langsung penalaran yang tidak tepat, (3) Pada pembuktian tidak langsung (dengan kontradiksi), kesalahan konsep pembuktian tidak langsung dan kesalahan penalaran.

Kata Kunci: kemampuan pembuktian; masalah bilangan; metode pembuktian

1. PENDAHULUAN

Sistem Pendidikan Nasional Republik Indonesia maupun National Council Teacher Mathematika (NCTM) telah ditetapkan lima keterampilan proses yang harus dimiliki peserta didik melalui pembelajaran matematika, yaitu (1) pemecahan masalah, (2) penalaran, (3) komunikasi, (4) koneksi, dan (5) representasi (NCTM, 2000). Kelima keterampilan proses ini diperlukan dalam membuktikan suatu pernyataan dalam matematika. Di dalam matematika, bukti adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Ini menunjukkan kelima keterampilan proses matematis ini perlu dikaji secara menyeluruh dan mendalam, dikaitkan dengan pengalaman peserta didik secara langsung. Pembuktian merupakan suatu proses validasi hukum matematika yang biasanya diberikan dalam bentuk argumen. Struktur argumen terdiri atas dua bagian yaitu hipotesis/premis dan kesimpulan (Subarinah, Junaidi, Triutami, Wulandari, & Salsabila, 2021). Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi, dan akhirnya dapat berasal dari postulat dimana sistem matematika tersebut berasal.

Pembuatan bukti telah lama mendapatkan perhatian besar dalam matematika teoritis. Menurut Susanto (2011) pembuktian matematis diartikan sebagai kumpulan alasan dengan fungsi memperkuat atau menentang suatu pendapat, gagasan, maupun pendirian dan secara logis menunjukkan nilai kebenarannya). Sedangkan Griffiths (Dewi & Dasari, 2023) mendefinisikan pembuktian matematis sebagai cara pikir yang formal serta logis diawali dari aksioma kemudian bergerak maju melalui serangkaian langkah logis hingga sampai pada sebuah konklusi. Yang dimaksud logis di sini, adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya. Jadi kebenaran semua premis pada setiap deduksi sudah dibuktikan atau diberikan sebagai asumsi.

Subarinah et al. (2017, 2018, 2020) secara bertahap dan berkelanjutan meneliti tentang invergigasi matematik yang terdiri 4 tahap, yaitu spesialisasi (specialising), pendugaan (conjecturing), generalisasi (generalising), dan justifikasi (justifying). Dalam justifikasi, dilakukan langkah pembenaran atau pembuktian dari dari eneralisasi. Hasil penelitian Subarinah et al. (2020) menunjukkan bahwa kemampuan justifikasi (pembuktian) mahasiswa program studi pendidikan matematika tergolong rendah, bahwa untuk mahasiswa dengan kemampuan matematika rendah dan sebagian besar mahasiswa dengan kemampuan matematika sedang, tidak dapat melaukan justifikasi.

Pembelajaran teori bilangan pada umumnya disajikan secara analitis yang memuat definisi, kemudian teorema-teorema dan akibat-akibat yang menuntut pembuktian secara urut dan logis. Sehingga kemampuan dalam membuktikan suatu teorema dan argument dalam masalah bilangan sangat diperlukan bagi mahasiswa calon guru matematika. Hal ini juga disebabkan pembuktian matematis tidak banyak dikaji dalam jenjang pendidikan dasar dan menengah. Dewi dan Dasari (2023) mengungkapkan bahwa dari 30 penelitian tentang pembuktian matematis, 16% untuk jenjang pendidikan menengah, selebihnya untuk pendidikan tinggi. Hal ini memberikan indikasi bahwa kemampuan pembuktian matematis sampai akhir jenjang pendidikan menengah masih belum optimal, tentu akan berakibat pada kemampuan pembuktian untuk mahasiswa calon guru matematika.

Metode dalam pembuktian matematika terdapat beberapa metode pembuktian misalnya metode induksi matematika, bukti langsung, bukti dengan kontrapositif maupun bukti dengan kontradiksi (Sundstrom 2014). Metode pembuktian terbagi menjadi tiga jenis, yaitu (1) pembuktian langsung, (2) tidak langsung (kontradiksi dan kontraposisi), dan (3) induksi matematika (Juandi, 2008; Kusno, 2014). Pembuktian langsung merupakan pembuktian menggunakan penyimpulan dengan memakai hipotesis-hipotesis secara langsung untuk sampai pada konklusinya, sedangkan bukti tidak langsung dimulai dengan asumsi negasi dari proporsi yang akan dibuktikan dan menunjukan bahwa hal itu menuju pada suatu kontradiksi (Kusno, 2014). Induksi matematika merupakan suatu metode pembuktian yang berbasis rekursi serta digunakan sebagai pembuktian dugaan yang mengklaim bahwa suatu penyataan benar untuk himpunan bilangan bulat positif dari beberapa variable (Firmasari & Sulaiman, 2019).

Dalam penelitian ini, sesuai dengan pendapat Sundstrom (2014), Juandi, (2008) dan Kusno (2014), metode pembuktian dibedakan menjadi empat. Keempat metode tersebut adalah (1) induksi matematika (2) pembuktian langsung, (3) kontradiksi (pembuktian tidak langsung), (4) dan kontraposisi (pembuktian tidak langsung).

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode campuran (mixed method) yaitu kualitatif dan kuantitatif (Sugiyono, 2009). Data kuantitatif diperlukan saat penskoran hasil tes soal pembuktian dan pengkategorian tingkat kemampuan dalam pembuktian mahasiswa calon guru matematika. Analisis data kualitatif diperlukan saat mendeskripsikan skema penalaran pembuktian masalah bilangan mahasiswa calon guru matematika pada tiap-tiap metode pembuktian, serta hubungan-hubungannya.

Sasaran penelitian ini adalah mahasiswa calon guru matematika di Program Studi Pendidikan Matematika PMIPA FKIP Universitas Mataram, syaratnya sedang atau telah mengambil mata kuliah teori bilangan dan logika matematika. Lokasi penelitian ini adalah di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Mataram.

Data penelitian yang dikumpulkan adalah (1) tes pembuktian masalah bilangan yang terdiri 3 soal pembuktian dengan metode yang berbeda, yaitu (i) induksi matematika, (ii) bukti langsung, (iii) bukti tidak langsung, dan (2) wawancara pada mahasiswa wakil proporsional metode pembuktian. Wawancara dilakukan menggunakan pedoman wawancara semi terstruktur, wawancara difokuskan untuk mengeksplorasi skema-skema penalaran mahasiswa calon guru dalam pembuktian matematis masalah bilangan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini menggunakan instrumen berupa soal pembuktian materi bilangan dengan menggunakan tiga cara pembuktian. Pembuktian yang pertama menggunakan induksi matematika, pembuktian kedua dengan bukti langsung, dan pembuktian ketiga dengan bukti tidak langsung. Penelitian dilaksankan pada mahasiswa Pendidikan Matematika yang mengambil mata kuliah Teori bilangan. Berikut akan dipaparkan instrumen yang digunakan dalam penelitian ini.

1) Untuk setiap bilangan asli $\boldsymbol{n}$ berlaku

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{i}^3 = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)\right)^2 = \frac{1}{4}\boldsymbol{n}^2(\boldsymbol{n}+1)^2$$

   Buktikan dengan induksi matematika!

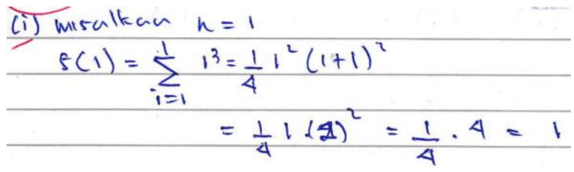
2) Buktikan secara langsung dan tidak langsung: jika $\boldsymbol{d}|\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{d}|\boldsymbol{b}$ maka $\boldsymbol{d}^2|\boldsymbol{ab}$.

Pada pembuktian dengan induksi matematika hanya 9% subjek yang dapat menjawab dengan benar (nilai 90-100). Subjek yang lain melakukan beberapa kesalahan. Pada pembuktian bagian (i) untuk n = 1, terdapat 5% subjek tidak menjawab untuk n = 1. Mereka beralasan tidak paham bahwa harus ditunjukkan dahulu bahwa pernyataan benar untuk n = 1. Dan ada 86% subjek melakukan manipulasi aljabar yang tidak tepat, yaitu kesalahan penalaran yang melibatkan bilangan asli. Subjek tidak melakukan kesamaan dari bilangan asli dengan melibatkan beberapa operasi untuk menunjukkan bahwa pernyataan benar untuk n = 1. Kesalahan-kesalahan yang dilakukan adalah sebagai berikut.

Tabel 1. Kesalahan dalam Pembuktian Induksi Matematika

Langkah	Kesalahan	Prosentase subjek (%)
i	tidak menjawab untuk n = 1	5
	manipulasi aljabar tidak tepat	86
ii	tidak melakukan manipulasi aljabar	15
	konsep kebenaran $n = k$ ke $n = k + 1$	37
	manipulasi aljabar	19
	konsep sigma	44

Dan berikut ini contoh jawaban yang kurang tepat pada bagian (i), dikarenakan subjek tidak tepat dalam melakukan manipulasi aljabar. Susunan kesamaan tidak diurutkan sesuai dengan yang akan dibuktikan. Jadi yang ditulis masih sama dengan buramnya (orek-orekan).

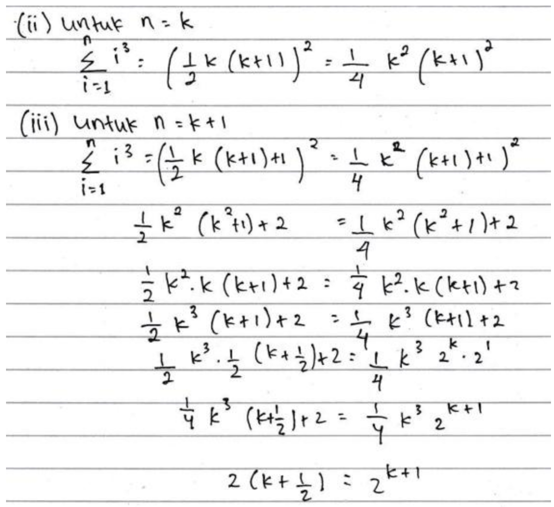

(i) misalkan $n = 1$

$f(1) = \sum_{i=1}^{1} 1^3 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2$

$= \frac{1}{4} 1 (2)^2 = \frac{1}{4} . 4 = 1$

Gambar 1. Jawaban Dengan Manipulasi Aljabar Yang Tidak Tepat untuk $n = 1$.

Pada pembuktian bagian (ii), hanya terdapat 9% subjek yang menjawab benar. Dalam pembuktian langkah kedua, terdapat 15% subjek tidak melakukan langkah manipulasi aljabar, yaitu kebenaran untuk $n = k$ membawa untuk kebenaran untuk $n = k + 1$. Subjek hanya menguraikan pernyataan untuk $n = k$ dan untuk $n = k + 1$, tanpa menghubungkan bahwa kebenaran untuk $n = k$, akan membawa kebenaran untuk $n = k + 1$. Subjek belum memahami sepenuhnya langkah-langkah pembuktian dalam induksi matematika.


(ii) untuk $n = k$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{1}{2} k (k+1)\right)^2 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2$

(iii) untuk $n = k+1$

$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{1}{2} k (k+1)+1\right)^2 = \frac{1}{4} k^2 \left((k+1)+1\right)^2$

$\frac{1}{2} k^2 (k^2+1)+2 = \frac{1}{4} k^2 (k^2+1)+2$

$\frac{1}{2} k^2 . k (k+1)+2 = \frac{1}{4} k^2 . k (k+1)+2$

$\frac{1}{2} k^3 (k+1)+2 = \frac{1}{4} k^3 (k+1)+2$

$\frac{1}{2} k^3 . \frac{1}{2} (k+\frac{1}{2})+2 = \frac{1}{4} k^3 2^k . 2^1$

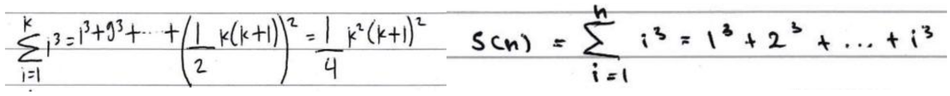
$\frac{1}{4} k^3 (k+\frac{1}{2})+2 = \frac{1}{4} k^3 2^{k+1}$

$2 (k+\frac{1}{2}) = 2^{k+1}$

Gambar 2. Kesalahan Langkah ke (ii) Kebenaran $n = k$ Membawa Kebenaran ke untuk $n = k + 1$

Pada jawaban subjek yang tidak melakukan langkah manipulasi aljabar, yaitu kebenaran untuk $n = k$ membawa ke kebenaran untuk $n = k + 1$.

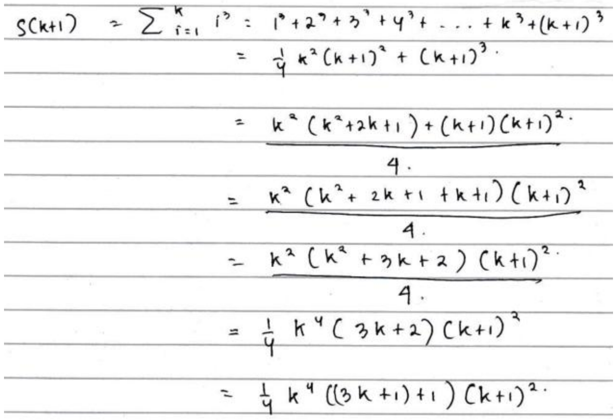
Terdapat 44% subjek melakukan kesalahan dalam konsep sigma. Subjek belum memahami sepenuhnya arti/makna konsep sigma.


$\sum_{i=1}^{k} i^3 = 1^3+2^3+\dots+\left(\frac{1}{2} k(k+1)\right)^2 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2$

$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + i^3$

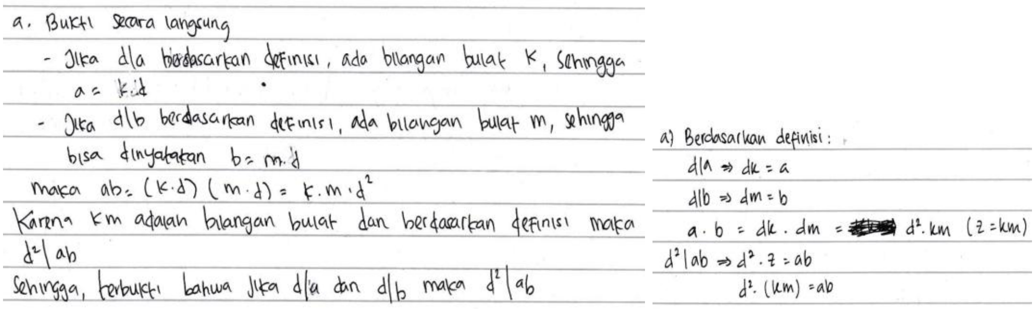
Gambar 3. Jawaban Dua Subjek yang Melakukan Kesalahan Konsep Sigma

Dalam pembuktian langkah kedua, terdapat 19% subjek melakukan kesalahan manipulasi aljabar. Subjek kurang teliti dalam melakukan proses manipulasi aljabarnya. Berikut contoh pekerjaan subjek yang kurang teliti dalam melakukan proses manipulasi aljabar, yaitu subjek salah dalam menfaktorkan, padahal langkah awal sudah benar.



Gambar 4. Kesalahan Subjek Dalam Manipulasi Aljabar

Pada pembuktian langsung, sebagian besar subjek (79%) dapat melakukannya, walaupun ada yang kurang lengkap argumennya (32%). Kelengkapan argumen yang ada adalah sebagai berikut: 1) tidak lengkap dalam menyebutkan definisi keterbagian, 2) tidak menyebutkan tentang ketertutupan perkalian bilangan bulat, 3) manipulasi aljabar tidak lengkap.

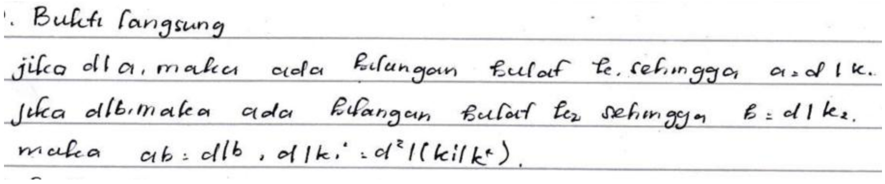


(a) (b)

Gambar 5. Kurang lengkap argumennya pada pembuktian langsung

Pada pembuktian dalam gambar (a) di atas, subjek tidak sifat tertutup perkalian bilangan bulat dan juga sifat pertukaran perkalian bilangan bulat. Pada gambar (b) subjek bahkan tidak memberikan argument sama sekali.

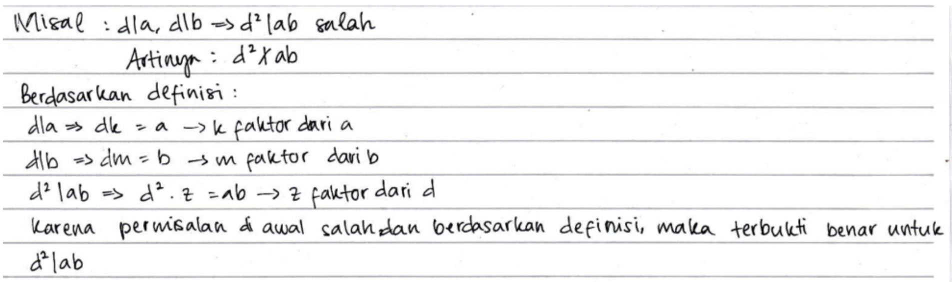
Terdapat 21% subjek yang tidak dapat membuktikan dengan cara langsung, dikarenakan salah konsep. Beberapa subjek tidak paham tentang konsep pembuktian langsung (14%), dan ada yang salah konsep tentang keterbagian (7%).


. Bukti langsung
jika $d | a$, maka ada bilangan bulat k. sehingga $a = d | k$.
jika $d | b$, maka ada bilangan bulat k_2 sehingga $b = d | k_2$.
maka $ab = d | b$, $d | k_1 = d^2 | (k_1 | k_2)$.

Gambar 6. Kesalahan Konsep pada Pembuktian Langsung

Pada gambar di atas, subjek salah konsep pada definisi keterbagian, sehingga kesalahan di awal menyebabkan kesalahan pada langkah selanjutnya.

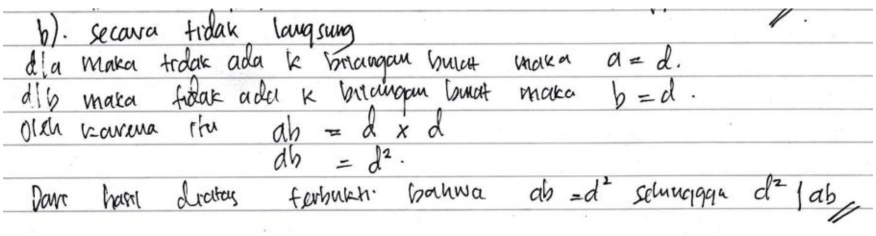
Pada pembuktian tidak langsung, hanya 7% subjek yang dapat melakukannya dengan benar. Walaupun masih terdapat sedikit penjelasan yang kurang lengkap. Subjek yang memahami pembuktian tidak langsung, tetapi tidak dapat melakukannya dengan benar ada sebanyak 31%. Subjek melakukan kesalahan manipulasi aljabar dan kesalahan konsep dari keterbagian.


Misal : $d|a$, $d|b \Rightarrow d^2|ab$ salah
Artinya : $d^2 \nmid ab$
Berdasarkan definisi :
$d|a \Rightarrow dk = a \to k$ faktor dari a
$d|b \Rightarrow dm = b \to m$ faktor dari b
$d^2|ab \Rightarrow d^2 . z = ab \to z$ faktor dari d
Karena permisalan di awal salah dan berdasarkan definisi, maka terbukti benar untuk
$d^2|ab$

Gambar 7. Hasil Pembuktian Tidak Langsung (Kurang Tepat)

Dalam pembuktian pada gambar di atas, konsep pembuktian tidak langsung dengan kontradiksi sudah benar. Konsep keterbagian juga benar, hanya saja cara penyampaiannya kurang tepat, karena tidak mengikuti urutan logisnya.

Sedangkan sebagian besar subjek (62%) tidak dapat memahami dan tidak melakukan pembuktian tidak langsung. Subjek yang tidak melakukan pembuktian tidak langsung (tidak menjawab) ada 14%. Sebagian subjek salah konsep tentang bukti tidak langsung (kontrapositif), seharusnya dibuktikan $\sim q \to \sim p$, tetapi subjek melakukan dengan $\sim p \to \sim q$.


b). secara tidak langsung
$d|a$ maka tidak ada k bilangan bulat maka $a = d$.
$d|b$ maka tidak ada k bilangan bulat maka $b = d$.
Oleh karena itu $ab = d \times d$
$db = d^2$.
Dari hasil diatas terbukti bahwa $ab = d^2$ sehingga $d^2 | ab$

Gambar 8. Hasil Pembuktian Tidak Langsung (Salah)

Pada gambar di atas, subjek tidak memahami cara pembuktian tidak langsung dan juga ada kesalahan konsep tentang keterbagian.

Mahasiswa pendidikan matematika seharusnya bisa melakukan pembuktian matematis (bukti formal), terutama pembuktian dengan induksi matematika. Karena mahasiswa pendidikan matematika adalah calon guru SMP/ sederajat dan SMA/ sederajat, dimana di sekolah, terutama SMA juga ada materi pembuktian dengan induksi matematika. Hal ini sejalan dengan Siswono et al., (2020) yang menyatakan bahwa pembuktian formal adalah komponen penting yang harus dimiliki dan dikembangkan oleh mahasiswa. Sedangkan kemampuan pembuktian matematis ini merupakan kemampuan mendasar yang seharusnya juga dimiliki oleh siswa yang belajar matematika (NCTM, 2000; Noto et al., 2019). Tetapi masih ada beberapa mahasiswa yang tidak memahami konsep pembuktian dengan induksi matematika, bahkan sebagian besar melakukan kesalahan dalam manipulasi aljabar. Hal ini disebabkan subjek tidak teliti dan kurang latihan, serta kebiasaan dari sekolah yang jarang mengerjakan soal yang berbantuk uraian.

Hasil penelitian ini menunjukkan, masih banyak mahasiswa pendidikan matematika yang melakukan kesalahan dalam pembuktian matematis. Hal ini sesuai dengan hasil penelitian Herutomo (2019) yang mengatakan bahwa beberapa kesalahan yang dilakukan dalam pembuktian induksi matematika adalah manipulasi aljabar yg tidak tepat dan kesalahan penalaran yang melibatkan bilangan asli. Penelitian oleh Tapo dan Rudhito (2025) juga menunjukan bahwa banyak mahasiswa pendidikan matematika yang membuat kesalahan dalam pembuktian matematika disebabkan manipulasi aljabar yang salah dan representasi visual yang buruk.

Pada pembuktian langsung, sebagian besar subjek bisa melakukannya. Tetapi pada pembuktian tidak langsung sebagian besar subjek tidak bisa melakukannya. Hal ini disebabkan di buku teks yang digunakan sebagian besar contoh bukti yang diberikan adalah bukti langsung dan tidak ada contoh pembuktian tidak langsungnya. Mahasiswa bingung, tidak mengetahui arah untuk melakukan pembuktian tidak langsung. Mahasiswa juga merasa pembuktian langsung lebih mudah dari pada pembuktian tidak langsung. Perbowo dan Pradipta (2017) mengungkapkan bahwa sebagian besar mahasiswa pendidikan matematika kesulitan mengingat dan menerapkan pembuktian tidak langsung, seperti kontrapositif dan kontradiksi, yang menunjukkan kesulitan dengan metode ini dibandingkan dengan pembuktian langsung.

4. SIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan sebelumnya, maka simpulan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut. Mahasiswa pendidikan matematika masih banyak yang melakukan kesalahan dalam pembuktian matematis. Hanya sebagian kecil mahasiswa yang dengan benar melakukan pembuktian. Kesalahan paling banyak yang dilakukan mahasiswa dalam pembuktian induksi matematika adalah kesalahan manipulasi aljabar, ada yang tidak melakukan manipulasi aljabar (15%) dan paling banyak yang kurang tepat dalam manipulasi aljabar (86%). Sedangkan kesalahan konsep (sigma) (44%) dan kesalahan dalam langkah kedua dalam pembuktian induksi matematika (37%). Dalam pembuktian langsung sebagian besar subjek (79%) dapat melakukan dengan benar, karena dalam buku teks banyak contoh pembuktian langsung. Sedangkan dalam pembuktian tidak langsung, sebagian besar subjek (62%) melakukan kesalahan. Hal ini dikarenakan tidak ada contoh pembuktian tidak langsung dalam buku teks. Dapat dikatakan bahwa masih banyak mahasiswa pendidikan matematika yang belum lancar dalam pembuktian matematis, terutama pada pembuktian tidak langsung.

5. REFERENSI

Atchley, R.A., Strayer, D.L., & Atchley, P. (2012) Creativity in the Wild: Improving Creative Reasoning through Immersion in Natural Settings. *PlosOne*, 7(12): e51474. http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0051474

Bergqvist, T., & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(2): 252-269. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.002.

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *39*(1): 1-12. https://doi.org/10.1080/00207390701464675

Dewi, N.S., & Dasari, D. (2023). Systematic Literature Review: Kemampuan Pembuktian Matematis. *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1): 240-254. https://doi.org/10.31004/cendekia.v7i1.1987

Firmasari, S., & Sulaiman, H. (2019). Kemampuan Pembuktian Matematis Mahasiswa Menggunakan Induksi Matematika. *Journal of Medives*: *Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang*, 3(1), 1–9. https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v3i1.642

Handayani, A.D. (2013). Penalaran Kreatif Matematis. *Jurnal Pengajaran MIPA*, 18(2): 161-166.

Herutomo, R.A. (2019) Kesalahan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematik. Jurnal Didaktik Matematika 6(1):54-68. DOI:10.24815/jdm.v6i1.13262

Hidayat, W., Wahyudin, & Prabawanto, S. (2018). Improving students' creative mathematical reasoning ability students through adversity quotient and argument driven inquiry learning. *Journal of Physics: Conf. Series* 948 (2018) 012005 http://doi.org/10.1088/1742-6596/948/1/012005

Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y., & Lithner, J. (2014) Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *Journal of* 26 *Mathematical Behavior*, (36): 20-32. http://dx.doi.org/10.1016 /j.jmathb.2014.08.003

Kusaeri, Lailiyah, S., Arrifadah, Y., & Asmiyah, S. (2022). Enhancing creative reasoning through mathematical task: The quest for an ideal design. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)*, 11(2): 482-490. http://doi.org/10.11591/ijere.v11i2.22125

Maltin, M.W. (2016). *Kognitif, edisi ke-3*. Bandar Lampung: Harakindo Publisihing.

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1): 58-69. http://www.jstor.org/stable/748797

Marasabessy, R., & Hasanah, A. (2021). Penalaran Matematika: Apa Aspek Sentralnya? *Jurnal Cendekia: Jurnal Pendidikan Matematika* 5(1): 562-577.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Inc.

NCTM. (2003). *Standards for Secondary Mathematics Teacher*. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) Inc.
Norqvist, M., Jonsson, B., & Lithner, J. (2019). Eye-tracking data and mathematical tasks with focus on mathematical reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55(1): 104216. https://doi.org/10.1016 /j.jmathb.2019.03.008.

Norqvist, M., Lithner, J., Jonsson, B., & Liljekvist, Y. (2016). *Creative reasoning more beneficial for cognitively weaker students*. Conference Paper February 2015.

Noto, M. S., Priatna, N., & Dahlan, J. A. (2019). Mathematical Proof: the Learning Obstacles of Pre- Service Mathematics Teachers on Transformation Geometry. *Journal on Mathematics Education*, *10*(1), 117–126. https://doi.org/10.22342/jme.10.1.5379.117-126

Nurrahmah, A., & Karim, A. (2018). Analisis kemampuan pembuktian matematis pada matakuliah teori bilangan. *Jurnal Edumath*,4(2):21-29. 27

Olsson, J. (2014). *Dynamic software enhancing creative mathematical reasoning*. Umea: Umea Universitet Publisher.

Olsson, J., & Granberg, C. (2022). Teacher-student interaction supporting students' creative mathematical reasoning during problem solving using Scratch. *Mathematical Thinking and Learning*, http://doi.org/10.1080/10986065.2022.2105567

Perbowo, K. S., & Pradipta, T. R. (2017). Pemetaan kemampuan pembuktian matematis sebagai prasyarat mata kuliah analisis real mahasiswa pendidikan matematika. KALAMATIKA Jurnal Pendidikan Matematika, 2(1), 81-90.

Prayitno, S. (2017). *Profil kemampuan komunikasi matematis siswa SMP dalam menyelesaikan soal matematika ditinjau dari perbedaan gaya kognitif dan gender*. Disertasi. Surabaya: Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya.

Prayitno, S. (2019). *Evaluasi Pembelajaran Matematika*. Mataram: Duta Pustaka Ilmu.

Prayitno, S., Kurniati, N., & Saputra, I. (2018). *Kemampuan Pemecahan Masalah Mahasiswa Calon Guru Matematika*. Prosiding Seminar Nasional Saintek 2018 tanggal 27 Oktober 2018 di Lombok Plaza Hotel, ISBN: 978-602-53669-0-1, 539-547.

Prayitno, S., Lu'luilmaknun, U., Sridana, N., & Subarinah, S. (2021). Analyzing the Ability of Mathematics Students as Prospective Mathematics Teachers on Multiple Mathematical Representation. *Advances in Social Science, Education and Humanistic Research (ASSEHR)*, Atlantis Press, 556: 309-313. https://doi.org/10.2991/assehr.k.210525.096

Prayitno, S., Amrullah, & Hayati, L. (2022). Analyzing Mathematics Prospective Teachers' Ability for Higher-Order-Thinking Problem Posing. *Advances in Social Science, Education and Humanistic Research (ASSEHR)*, Atlantis Press, 686: 379–387. https://doi.org/ 10.2991/978-2-494069-21-3_41

Putri, C.K., & Juandi, D. (2023). Implementasi STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis dan Penalaran Matematis. *JIPM (Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika)*, 11(2): 350-359. http://dx.doi.org/10.25273/jipm

Rohati, Kusumah, Y.S., & Kusnandi. (2023). Exploring Students' Mathematical Reasoning Behavior in Junior High Schools: A Grounded Theory. *Education Science, 13,* 252. https://doi.org/10.3390/educsci13030252

University of Chicago School Mathematics Project. https://ucsmp.uchicago.edu/resources/van-hiele/

Siswono, T. Y. E., Hartono, S., & Kohar, A. W. (2020). Deductive or inductive? prospective teachers' preference of proof method on an intermediate proof task. *Journal on Mathematics Education*, *11*(3), 417–438. https://doi.org/10.22342/jme.11.3.11846.417-438

Subarinah, S. Prayitno, S, Sridana, N. (2020) Analysis of students' mathematical investigation based on the variation of mathematical abilities. *Advances in Social Science, Education and Humanitis Researc Atlantis Press.* Vol 465 pp 115-118

Subarinah, S., Triutami, T.W., & Deni, H. (2019). Teori Bilangan. Mataram: Pustaka Bangsa

Subarinah, S, Budayasa, I.K., Lukito, A. (2018). Profil Proses Kognitif Siswa SMP dalam Investigasi Matematik Ditinjau dari Perbedaan Gender. *Jurnal Ilmiah Profesi Pendidikan.* Volume 3, Nomor 1, Mei 2018, 15-23, p-ISSN 2502-7069, e-ISSN 2620-8326

Subarinah, S. (2017). *Profil Proses Kognitif Siswa SMP dalam Investigasi Matematik Ditinjau dari Perbedaan Kemampuan Matematika dan Gender*. Desertasi.

Sugiyono. (2009). *Metode penelitian kuantitatif, kualitatif dan R&D*. Bandung: Alfabeta.

Sukirman. (2001). Teori Bilangan. Jakarta: Universitas Terbuka
Sundstrom, T. (2014). Mathematical Reasoning: Writing and Proof. California: Department of Mathematics Grand Valley State University Allendale.

Susanto, H. A. (2011). *Pemahaman Pemecahan Masalah Pembuktian Sebagai Sarana Berpikir Kreatif*. Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 189–196.

Susanto, S., & Mahmudi, A. (2021). Tahap berpikir geometri siswa SMP berdasarkan teori van Hiele ditinjau dari keterampilan geometri. *Jurnal Riset Pendidikan Matematika*, 8(1): 106–116. https://doi.org/10.21831/jrpm.v8i1.17044

Syafri, F.S. (2017). Kemampuan representasi matematis dan kemampuan pembuktian matematika, *Jurnal Edumath*, 3(1):49-55.29

Tapo, M. M., & Rudhito, M. A. (2025). Analisis kesulitan pembuktian matematis pada materi teori himpunan dari sudut pandang neurosains. ELIPS: Jurnal Pendidikan Matematika, 6(1), 1-16.

Yazidah, N. I., Sulistyorini, Y., & Kartika, E. D. (2022). Analisis Kesalahan dalam Pembuktian Teorema Bilangan Bulat pada Mahasiswa IKIP Budi Utomo Malang. *Journal Focus Action of Research Mathematic (Factor M)*, 4(2), 17-26.

Zhang, D., & Qi, C. (2019). Reasoning and proof in eighth-grade mathematics textbooks in China. *International Journal of Educational Research*, 98(1): 77-90. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.08.015