



## Profil Kesalahan Proses Berpikir Matematis Mahasiswa Berdasarkan Tahapan Berpikir Mason

Ketut Sarjana<sup>1</sup>, Gilang Primajati<sup>1</sup>, Ulfa Lu'luilmaknun<sup>1</sup>, Ni Made Intan Kertiyani<sup>1</sup>, Eka Kurniawan<sup>1</sup>, Dea Nadia<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram, Mataram

<sup>2</sup> Mahasiswa Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram, Mataram

ksarjana@unram.ac.id

### Abstract

Mathematical proof is an essential competency for prospective mathematics teachers because it is closely related to reasoning and mathematical thinking skills. This study aimed to describe the profile of students' mathematical thinking errors based on Mason's thinking stages, namely *entry*, *attack*, and *review*, in proving mathematical principles on geometric vector topics. A quantitative descriptive approach was employed involving 44 sixth-semester Mathematics Education students. Data were collected through an essay-based mathematical proof test and analyzed using an error analysis rubric based on Mason's thinking stages. Descriptive statistics were used to calculate the frequency and percentage of errors at each stage. The results revealed that the percentages of errors at the *entry*, *attack*, and *review* stages were 18%, 39%, and 43%, respectively. Errors at the *entry* stage were mainly related to incomplete identification of given information and incorrect mathematical notation, whereas *attack* stage errors involved difficulties in constructing proof strategies and understanding the angle between vectors. At the *review* stage, students failed to verify the validity of their proofs and formulate appropriate conclusions. In conclusion, students' mathematical thinking errors were predominantly found at the *attack* and *review* stages.

**Keywords:** mathematical thinking; Mason's thinking stages; geometric vectors; students' errors.

### Abstrak

Pembuktian matematika merupakan salah satu kompetensi yang harus dikuasai mahasiswa pendidikan matematika karena berkaitan erat dengan kemampuan penalaran dan berpikir matematis. Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan profil kesalahan proses berpikir matematis mahasiswa berdasarkan tahapan berpikir Mason, yaitu *entry*, *attack*, dan *review*, pada pembuktian prinsip matematika materi vektor secara geometris. Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif kuantitatif dengan subjek sebanyak 44 mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika semester VI. Data dikumpulkan melalui tes uraian pembuktian matematika dan dianalisis menggunakan rubrik kesalahan berdasarkan tahapan berpikir Mason. Analisis data dilakukan secara deskriptif menggunakan frekuensi dan persentase kesalahan pada setiap tahapan. Hasil penelitian menunjukkan bahwa persentase kesalahan pada tahap *entry*, *attack*, dan *review* berturut-turut sebesar 18%, 39%, dan 43%. Kesalahan pada tahap *entry* didominasi oleh ketidaklengkapan informasi dan penggunaan simbol matematika, sedangkan pada tahap *attack* mahasiswa mengalami kesulitan dalam menyusun strategi pembuktian dan memahami konsep sudut antardua vektor. Pada tahap *review*, mahasiswa belum mampu memverifikasi validitas pembuktian dan menyusun kesimpulan secara tepat. Dengan demikian, kesalahan proses berpikir matematis mahasiswa didominasi pada tahap *attack* dan *review*.

**Kata kunci:** proses berpikir matematis; tahapan Mason; vektor geometris; kesalahan mahasiswa.

## 1. PENDAHULUAN

Proses berpikir matematis merupakan kemampuan untuk memahami, menganalisis dan menyelesaikan masalah melalui prosedur yang logis (Sarjana et al., 2026). Dalam pembelajaran matematika, proses berpikir memiliki peran penting karena matematika tidak hanya menuntut kemampuan menghitung, tetapi juga kemampuan memahami konsep, bernalar logis, menyusun argumen, dan menarik kesimpulan yang valid. Oleh karena itu, proses berpikir matematis menjadi aspek penting yang perlu dikaji, terutama pada mahasiswa calon guru matematika.

Mason et al. (2010) mengemukakan bahwa proses berpikir matematis dapat dilihat melalui tiga tahap utama, yaitu *entry*, *attack*, dan *review*. Dalam konteks pembuktian matematika, ketiga tahap tersebut memiliki peran yang sangat penting. Namun, dalam praktiknya, masih ada mahasiswa mengalami kesalahan dalam menyusun pembuktian matematika. Kesalahan tersebut dapat terjadi sejak tahap memahami masalah, memilih strategi pembuktian, hingga memeriksa kembali kebenaran argumen yang telah disusun. Pada tahap *entry*, mahasiswa dapat keliru dalam memahami pernyataan atau gagal mengidentifikasi informasi penting. Pada tahap *attack*, mahasiswa dapat menggunakan strategi yang tidak tepat, membuat lompatan logika, atau menyusun argumen yang tidak lengkap. Pada tahap *review*, mahasiswa sering tidak melakukan pemeriksaan ulang sehingga kesalahan dalam pembuktian tidak terdeteksi. Kondisi ini menunjukkan bahwa kesalahan pembuktian tidak hanya berkaitan dengan hasil akhir, tetapi juga dengan proses berpikir yang terjadi selama mahasiswa membangun pembuktian.

Beberapa penelitian sebelumnya telah mengkaji kemampuan pembuktian dan proses berpikir matematis mahasiswa (Stylianides et al., 2024), namun kajian yang secara khusus memetakan profil kesalahan proses berpikir matematis mahasiswa berdasarkan tiga tahap Mason, yaitu *entry*, *attack*, dan *review*, masih perlu dikembangkan. Oleh karena itu, pendekatan deskriptif kuantitatif dapat digunakan untuk memberikan gambaran mengenai kecenderungan kesalahan mahasiswa pada setiap tahap proses berpikir Mason secara lebih luas.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan profil kesalahan proses berpikir matematis mahasiswa berdasarkan tahapan berpikir Mason, yaitu *entry*, *attack*, dan *review*, dalam pembuktian prinsip matematika. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi mengenai tahap proses berpikir yang paling banyak mengalami kesalahan, sehingga dapat menjadi dasar bagi dosen dalam merancang pembelajaran pembuktian matematika yang lebih terarah dan sesuai dengan kesulitan mahasiswa.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan deskriptif kuantitatif. Pendekatan ini dipilih karena penelitian bertujuan mendeskripsikan profil kesalahan proses berpikir

matematis mahasiswa berdasarkan tahapan berpikir Mason, yaitu *entry*, *attack*, dan *review*, dalam menyelesaikan soal pembuktian prinsip matematika pada materi vektor secara geometris. Subjek penelitian adalah 44 mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika semester VI yang telah mempelajari materi vektor secara geometris.

Instrumen penelitian berupa tes pembuktian matematika pada materi vektor secara geometris dan rubrik analisis kesalahan proses berpikir berdasarkan tahapan Mason. Tes diberikan dalam bentuk soal uraian (Gambar 1) yang menuntut mahasiswa memahami pernyataan, menyusun strategi pembuktian, menggunakan konsep vektor secara geometris, serta memeriksa kembali kebenaran argumen yang digunakan.

<p>Misalkan diberikan <math>\triangle ABC</math>, <math>\alpha =</math> besar sudut <math>\overline{AB}</math> dan <math>\overline{AC}</math>, <math>\beta =</math> besar sudut <math>\overline{BC}</math> dan <math>\overline{BA}</math>, <math>\gamma =</math> besar sudut <math>\overline{CA}</math> dan <math>\overline{CB}</math>, dan <math> \overline{AB}  = c,  \overline{BC}  = a,  \overline{AC}  = b</math>.</p> <p>Buktikan bahwa</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ <p>Mulai bekerja dari</p> $ \overline{BA}  +  \overline{AC}  =  \overline{BC} $ <p>(ingat pilih besar sudut antara 2 vektor dan gunakan sifat <math>a \circ a =  a ^2</math>)</p>
---

**Gambar 1.** Soal tes

Teknik pengumpulan data dilakukan melalui pemberian tes pembuktian kepada seluruh subjek penelitian. Jawaban mahasiswa kemudian dianalisis dengan mengidentifikasi kesalahan yang muncul pada setiap tahapan proses berpikir Mason. Setiap kesalahan diklasifikasikan ke dalam tahap *entry*, *attack*, atau *review* berdasarkan indikator yang telah ditetapkan.

Data dianalisis menggunakan teknik statistik deskriptif. Analisis dilakukan dengan menghitung frekuensi dan persentase kesalahan mahasiswa pada setiap tahapan proses berpikir Mason. Persentase kesalahan dihitung menggunakan rumus:

$$P = \frac{f}{N} \times 100\%$$

Keterangan:

P = persentase kesalahan mahasiswa;

f = jumlah mahasiswa yang melakukan kesalahan pada suatu indikator;

N = jumlah seluruh mahasiswa (44 orang).

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

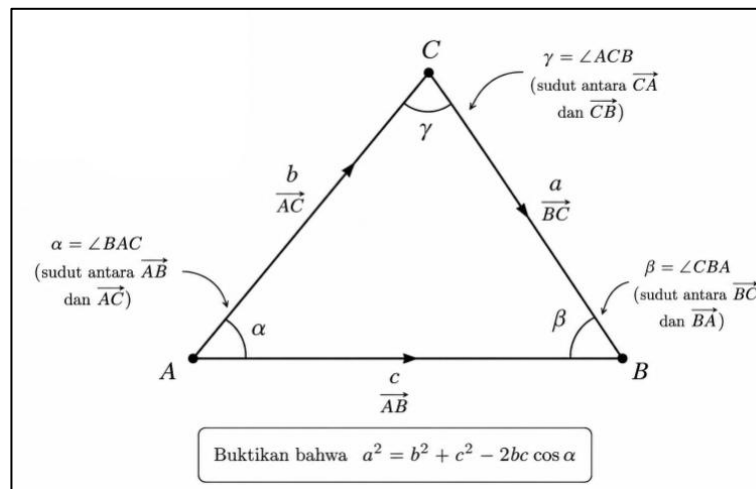
Analisis dilakukan terhadap jawaban 44 mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika semester VI pada soal pembuktian prinsip matematika materi vektor secara geometris. Profil kesalahan dianalisis berdasarkan tiga tahapan proses berpikir Mason. Hasil analisis disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Persentase Kesalahan Proses Berpikir Mahasiswa Berdasarkan Tahapan Mason

Tahap Proses Berpikir	Jumlah Mahasiswa	Persentase (%)
Entry	8	18
Attack	31	70
Review	36	82

Tabel 1 menunjukkan bahwa kesalahan mahasiswa paling banyak terjadi pada tahap *review*, diikuti tahap *attack*, sedangkan kesalahan paling sedikit ditemukan pada tahap *entry*. Hasil ini menunjukkan bahwa sebagian besar mahasiswa telah mampu memahami permasalahan yang diberikan, namun masih mengalami kesulitan ketika menyusun pembuktian secara logis dan melakukan pemeriksaan kembali terhadap argumen yang telah dibuat.

#### 3.1. Kesalahan pada Tahap *Entry*

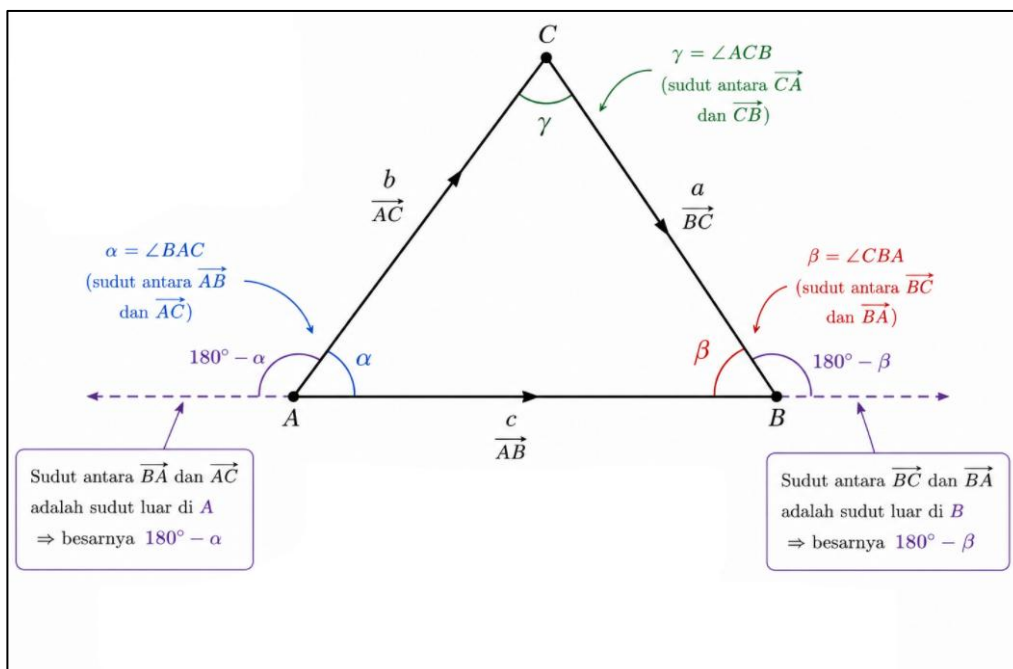


Gambar 2. Tahap *Entry*

Gambar 2 merupakan hasil interpretasi dari soal pada Gambar 1. Gambar 2 menunjukkan tahapan pertama proses berpikir Mason yaitu *entry*. Tahap *entry* merupakan tahap ketika mahasiswa memahami permasalahan, mengidentifikasi informasi yang diketahui, menentukan apa yang akan dibuktikan, serta mengenali konsep matematika yang relevan (Mason et al., 2010).

Berdasarkan hasil analisis, bentuk kesalahan yang paling sering ditemukan meliputi tidak menuliskan informasi yang diketahui secara lengkap serta salah dalam menulis simbol matematika. Meskipun demikian, sebagian besar mahasiswa telah mampu memahami maksud soal dengan baik. Hal ini menunjukkan bahwa hambatan utama mahasiswa bukan terletak pada pemahaman awal terhadap permasalahan, melainkan pada proses mengembangkan pembuktian. Temuan tersebut sejalan dengan penelitian Faizah et al. (2020) yang menunjukkan bahwa mahasiswa umumnya telah mampu memasuki tahap awal (*entry*), namun mengalami kesulitan pada tahap berikutnya ketika harus membangun argumen pembuktian secara formal. Penelitian Inglis dan Alcock (2012) yang menyatakan bahwa mahasiswa umumnya mampu mengidentifikasi informasi awal dalam suatu pembuktian, tetapi mengalami kesulitan ketika harus mengembangkan informasi tersebut menjadi argumen deduktif yang valid. Hasil serupa juga dilaporkan oleh Selden dan Selden (2003) bahwa keberhasilan memahami pernyataan yang akan dibuktikan belum menjamin kemampuan mahasiswa dalam menyusun pembuktian formal karena kedua kemampuan tersebut melibatkan proses kognitif yang berbeda.

### 3.2. Kesalahan pada Tahap *Attack*



Gambar 3. Tahap *Attack*

Tahap attack merupakan tahap inti penyelesaian masalah. Pada tahap ini mahasiswa menyusun strategi pembuktian, memilih konsep yang sesuai, melakukan manipulasi matematis, serta mengembangkan argumen deduktif. Gambar 3 merupakan salah satu cara memulai tahap *attack*, dimana mahasiswa seharusnya dapat menganalisis atau mengeksplorasi Gambar 2.

Kesalahan yang ditemukan meliputi kesalahan dalam melakukan manipulasi geometris, langkah pembuktian yang tidak runtut, dan kesalahan paling sering ditemukan pada memahami konsep besar sudut antara  $\vec{BA}$  dan  $\vec{AC}$  (Gambar 4). Gambar 4 menunjukkan bahwa mahasiswa salah memahami besar sudut antara  $\vec{BA}$  dan  $\vec{AC}$  adalah  $\alpha$  sehingga tidak dapat membuktikan kebenaran bahwa  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{dan } |\vec{BA} + \vec{AC}|^2 &= |\vec{BC}|^2 = (b-a)^2 \\ |\vec{BC}|^2 &= (\vec{BA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{BA} + \vec{AC} \cdot \vec{AC} + 2(\vec{BA} \cdot \vec{AC}) \\ &= |\vec{BA}|^2 + |\vec{AC}|^2 + 2|\vec{BA}||\vec{AC}|\cos \alpha \end{aligned}$$

Gambar 4. Kesalahan Memahami Konsep Besar Sudut Antara  $\vec{BA}$  dan  $\vec{AC}$

Persentase yang tinggi pada tahap ini menunjukkan bahwa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam mengonstruksi pembuktian secara sistematis. Temuan ini juga didukung oleh Moore (1994) yang menemukan bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan menentukan langkah awal pembuktian, memilih definisi atau teorema yang relevan, serta menghubungkan setiap langkah menjadi argumen yang logis. Sebagian mahasiswa telah memperoleh ide penyelesaian, namun belum mampu menghubungkan setiap langkah menjadi suatu argumen deduktif yang utuh. Hasil ini mendukung penelitian Weber (2001) yang menyatakan bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan bukan karena kurang memahami definisi, tetapi karena belum memiliki strategi pembuktian (*proof strategy*) yang memadai. Kondisi tersebut juga menunjukkan bahwa pembelajaran pembuktian masih perlu memberikan penekanan pada pengembangan penalaran deduktif, bukan hanya penguasaan konsep. Kesalahan tersebut menunjukkan adanya miskonsepsi terhadap representasi vektor dan orientasi arah vektor. Menurut Harel dan Sowder (2007), mahasiswa sering mengalami kesulitan ketika suatu konsep geometri direpresentasikan dalam bentuk vektor karena perhatian mahasiswa lebih terfokus pada besar sudut geometris daripada arah vektor yang memengaruhi hubungan hasil kali titik.

### 3.3 Kesalahan pada Tahap *Review*

Tahap review merupakan tahap terakhir dalam proses berpikir Mason. Pada tahap ini mahasiswa memeriksa kembali ketepatan langkah pembuktian, mengevaluasi konsistensi argumen, dan memastikan bahwa kesimpulan yang diperoleh benar-benar membuktikan pernyataan yang diminta.

$$c^2 + b^2 + 2cb \cos \alpha = a^2$$

$$b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha = a^2$$

jadi  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$ .

**Gambar 5.** Kesalahan Memberikan Kesimpulan Akhir

Hasil penelitian menunjukkan bahwa tahap ini memiliki persentase kesalahan tertinggi. Kesalahan yang paling banyak ditemukan adalah tidak memberikan kesimpulan akhir dan kesimpulan tidak sesuai dengan hasil pembuktian (Gambar 5). Temuan ini menunjukkan bahwa sebagian besar mahasiswa cenderung menganggap proses pembuktian selesai setelah memperoleh hasil, tanpa melakukan evaluasi terhadap validitas argumen yang telah disusun. Padahal, dalam pembuktian matematika, proses verifikasi merupakan bagian yang tidak terpisahkan dari keseluruhan proses berpikir matematis. Temuan ini konsisten dengan penelitian Alcock dan Weber (2010) yang menunjukkan bahwa mahasiswa jarang melakukan validasi terhadap pembuktian yang telah disusun karena menganggap pembuktian selesai setelah memperoleh hasil akhir.

Menurut Mason et al. (2010), tahap review memiliki fungsi penting untuk meningkatkan kualitas penalaran matematis melalui refleksi terhadap proses penyelesaian yang telah dilakukan. Rendahnya kemampuan mahasiswa pada tahap ini menunjukkan bahwa kebiasaan melakukan refleksi matematis masih perlu dikembangkan dalam proses pembelajaran. Hasil serupa juga ditemukan oleh Inglis dan Alcock (2012) yang menyatakan bahwa mahasiswa cenderung lebih fokus pada memperoleh jawaban dibandingkan mengevaluasi validitas argumen pembuktian. Oleh karena itu, pembelajaran pembuktian perlu memberikan kesempatan kepada mahasiswa untuk melakukan refleksi dan penilaian terhadap pembuktian yang disusun, baik secara mandiri maupun melalui diskusi.

Hasil penelitian ini memberikan implikasi bahwa dosen perlu mengintegrasikan aktivitas yang melatih mahasiswa untuk menjelaskan alasan di setiap langkah pembuktian, menilai validitas argumen, dan melakukan pemeriksaan ulang terhadap pembuktian yang telah disusun. Dengan demikian, kemampuan pembuktian mahasiswa tidak hanya meningkat dari sisi prosedural, tetapi juga berkembang dari sisi penalaran matematis yang menjadi tujuan utama pembelajaran pembuktian.

#### 4. SIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa kesalahan proses berpikir matematis mahasiswa dalam pembuktian prinsip matematika pada materi vektor secara geometris terjadi pada seluruh tahapan berpikir Mason. Berdasarkan analisis terhadap 44 mahasiswa, kesalahan paling sedikit terjadi pada tahap *entry* (18%), sedangkan kesalahan lebih banyak ditemukan pada tahap *attack* (70%) dan paling tinggi pada tahap *review* (82%).

Temuan ini menunjukkan bahwa sebagian besar mahasiswa telah mampu memahami permasalahan, tetapi masih mengalami kesulitan dalam menyusun strategi pembuktian, mengembangkan argumen deduktif, serta memverifikasi kebenaran dan menyusun kesimpulan pembuktian.

## 5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penelitian ini didanai oleh Universitas Mataram melalui Dana DIPA BLU Skema Penelitian Peningkatan Kapasitas Universitas Mataram Tahun Anggaran 2025 berdasarkan Kontrak Penelitian Nomor 3016/UN18.L1/PP/2025. Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Mataram atas dukungan pendanaan yang diberikan.

## 6. REFERENSI

- Alcock, L., & Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof construction: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, 3(1), 1-22.
- Faizah, S., Nusantara, T., Sudirman, S., & Rahardi, R. (2020). Exploring students' thinking process in mathematical proof of abstract algebra based on Mason's framework. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, 8(2), 871-884.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.
- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 358-390.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Pearson Education.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27(3), 249-266.
- Sarjana, K., Kertiyani, N. M. I., Lu'luilmaknun, U., Kurniawan, E., & Primajati, G. (2026). Analisis Proses Berpikir Matematis Mahasiswa Pada Pembuktian Prinsip Matematika. *Jurnal Ilmiah Profesi Pendidikan*, 11(2), 1770-1777.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, 34(1), 4-36.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 47-59.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational studies in mathematics*, 48(1), 101-119.