Mandalika Mathematics and Education Journal
Volume 4 Nomor 1, Juni 2022
e-ISSN 2715-1190| |p-ISSN 2715-8292
DOI: http://dx.doi.org/10.29303/jm.v4i1.1763

Pelabelan Total Sisi Ajaib Super pada Graf T(2,n,n+6)

N.N.A Andayani[1], I.G.N Pujawan[2], Made Juniantari[3*]

[1] *Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja*
[2,3] *Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja*

nyomanayulita@gmail.com

Abstract
Graph labeling is one of the topics in graph theory which helps a lot in solved everyday problems. Study on labeling on graphs, especially the Super Edge-Magic Total Labelling is still ongoing, although for some classes of graph have been known to have Super Edge-Magic Total Labelling, but many problems that have not been resolved, one of them is the conjecture stated in the paper Enomoto et al (1998: 108) that all tree graphs have (super) edge-magic total labeling. Motivated by this conjecture, this study examined the total labeling of the super magical side of Graph T (2, n, n + 6) which is one of the tree graphs. The results of this study is show that Graph T (2, n, n + 6) is a graph that can be labelled by the Super Edge-Magic Total Labeling (SEMT), with the magic value of graph T (2, n, n + 6) for *n* is even number is k = 5n +23, and for *n* is even number the magic value is k = 5n +24.

Keywords: Super Magic Graph; Super Edge-Magic Total Labelling; Tree; Magic Value;

Abstrak
Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang banyak membantu dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari. Penelitian mengenai pelabelan pada graf, khususnya pelabelan total sisi ajaib super hingga kini masih terus dilakukan, meskipun beberapa kelas graf telah diketahui memiliki pelabelan tersebut namun banyak permasalahan yang sampai kini belum terpecahkan, diantaranya adalah konjektur yang dinyatakan pada paper Enomoto et al (1998:108) bahwa semua graf pohon memiliki pelabelan total sisi-ajaib (super). Termotivasi oleh konjektur tersebut penelitian ini mengkaji pelabelan total sisi ajaib super pada Graf $T(2,n,n+6)$ yang merupakan salah satu graf pohon. Hasil dari penelitian ini berupa teori yang dituangkan ke dalam teorema yang menyatakan bahwa Graf $T(2,n,n+6)$ merupakan graf yang dapat memenuhi Pelabelan Total Sisi Ajaib Super (TSAS), dengan konstanta ajaib dari graf T $(2,n,n+6)$ untuk nilai n genap adalah $k = 5n +23$, dan untuk nilai n ganjil adalah $k = 5n +24$.

Kata Kunci: Graf Ajaib Super; Pelabelan Total Sisi Ajaib Super; Graf Pohon; konstanta ajaib;

1. PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang banyak membantu dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari, sepertidalam bidang desain sirkuit, radar, transportasi, ilmu komputer, ilmu kimia dan desain jaringan komunikasi. Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan yang membawa setiap elemen graf (sisi, titik, maupun sisi dan titik) ke himpunan bilangan bulat positif, yang disebut dengan label. Pelabelan graf berdasarkan elemennya dibedakan menjadi 3 yaitu; pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.

Pelabelan total yakni pemberian label pada titik dan sisi dalam graf, yang dibedakan menjadi dua, yakni pelabelan total titik dan pelabelan total sisi. Hal yang membedakan kedua pelabelan ini adalah perhitungan bobotnya, pelabelan total titik menghitung bobot titik, sedangkan pelabelan total sisi menghitung bobot sisi. Bobot sisi dalam pelabelan total sisi adalah jumlah label dari titik-titik yang berinsiden dengan sebuah sisi. Pelabelan total sisi selanjutnya dikembangkan menjadi dua yaitu pelabelan total sisi ajaib dan pelabelan total sisi ajaib super.

Menurut Ngurah (2007) suatu graf ajaib G dengan pelabelan ajaib *f* dikatakan memiliki pelabelan total sisi ajaib super, jika $f: V(G) \to \{1,2,3,..,p\}$. Secara sederhana pelabelan total sisi ajaib super merupakan suatu pemberian label untuk himpunan titik dengan bilangan bulat berurutan yang dimulai dari 1 hingga p, selanjutnya bilangan $p+1, p+2, p+3,..., p+q$ digunakan untuk label himpunan sisinya, sehingga bobot setiap sisinya memiliki nilai yang sama, yakni *k* yang selanjutnya disebut dengan konstanta ajaib (*magic value*).

Syarat perlu dan syarat cukup untuk suatu graf yang ajaib super diberikan pada lemma II.1. **Lemma II.1** (*Figuroa-Centeno et al, 2001*) *Graf G adalah ajaib super jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif* $f: V(G) \to \{1,2,3,..., p\}$ *sehingga himpunan* $S = \{ f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$ *memuat sebanyak q bilangan berurutan . Dalam hal ini f dapat diperluas menjadi suatu pelabelan ajaib super dari G dengan konstanta ajaib* $k = p + q + \min(S)$. Berdasarkan Lemma II.1, untuk menyajikan graf ajaib super cukup ditampilkan pelabelan titiknya saja.

Penelitian mengenai pelabelan total sisi-ajaib hingga kini masih terus dilakukan, meskipun beberapa kelas graf telah diketahui memiliki pelabelan tersebut namun banyak permasalahan yang sampai kini belum terpecahkan. Di antaranya adalah konjektur yang dinyatakan pada paper Enomoto et al (1998:108) bahwa semua graf pohon memiliki pelabelan total sisi-ajaib (super). Akan tetapi konjektur ini belum terbukti kebenarannya, beberapa ilmuwan berusaha membuktikan konjektur tersebut salah satunya Sudarsana et al, namun masih berupa hasil parsial. Adapun beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan ajaib super juga telah dibahas oleh Anak Agung Gede Ngurah pada Disertasi S-3 yang berjudul *Ketotalsisiajaiban Graf dan Defisiensinya* tahun 2007. Termotivasi oleh konjektur tersebut penelitian ini akan mengkaji pelabelan total sisi ajaib super pada Graf *T*(*2,n,n+6*) yang merupakan salah satu graf pohon.

2. METODE PENELITIAN

Metode dalam penelitian ini adalah eksperimental dengan tahapan sebagai berikut. Tahap I adalah kajian literatur, penelusuran pustaka serta melakukan pengamatan konstruksi pelabelan total sisi ajaib super dari penelitian yang terdahulu, diantaranya *e-journal* Dynamic Survey of Graph Labelling oleh Gallian (1997), paper Enomoto et al (1998), Disertasi S-3 oleh Anak Agung Gede Ngurah (2007), dan jurnal Sudarsana (2013) mengenai Pelabelan Total Sisi Ajaib Super (TSAS) pada Gabungan Graf Bintang Ganda dan Lintasan. Selanjutnya, tahap II membuat formula pelabelan TSAS, yakni membuat formulasi label titik dan label sisi dengan pelabelan TSAS pada graf T(2,n,n+6) sesuai dengan pelabelan yang telah dilakukan. Tahap III adalah tahap verifikasi, yakni menuangkan hasil yang diperoleh dalam tahap ke II menjadi sebuah teorema lengkap dengan buktinya.

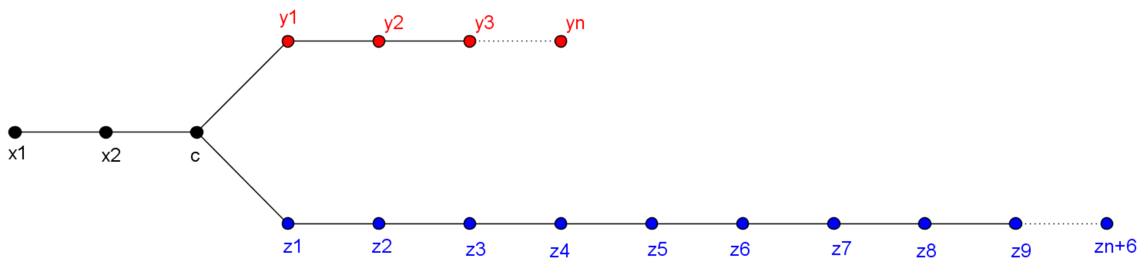
3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dari penelitian ini berupa teori yang dituangkan ke dalam teorema yang menyatakan bahwa Graf T(*2,n,n+6*) merupakan graf yang dapat memenuhi Pelabelan Total Sisi Ajaib Super (TSAS). Graf T(*2,n,n+6*) ini merupakan salah satu graf pohon atau merupakan satu kasus khusus untuk graf T(*m,n,k*). Graf $T(2,n,n+6)$ merupakan graf yang terdiri dari $2+n+n+6+1$ buah titik dan $2+n+n+6$ buah sisi dengan satu titik berderajat 3, tiga titik berderajat 1 dan titik yang lainnya berderajat 2. Himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $T(2,n,n+6)$ di definisikan sebagai berikut.

$$V(T(2,n,n+6)) = \{c\} \cup \{x_i \mid 1 \le i \le 2\} \cup \{y_i \mid 1 \le i \le n\} \cup \{z_i \mid 1 \le i \le n+6\},$$

dan

$$E(T(2,n,n+6)) = \{cx_i, cy_i, cz_i\} \cup \{x_i x_{i+1} \mid 1 \le i\} \cup \{y_i y_{i+1} \mid 1 \le i \le n-1\} \cup \{z_i z_{i+1} \mid 1 \le i \le n+5\}$$



Gambar 1. Graf T(*2,n,n+6*)

Teorema 1. Graf T(2,n,n+6) dengan n bilangan genap adalah Graf Super Sisi Ajaib dengan konstanta ajaib $k = 5n + 23$

Bukti :

Ambil titik-titik sesuai dengan himpunan titik pada graf T(*2, n, n + 6*), yakni x_i , $i = 1,2$, y_i, $1 \le i \le n$ dan z_i, $1 \le i \le n + 6$.

Definisikan sebuah pelabelan titik pada graf T(*2,n,n + 6*)

Untuk $n \equiv 0 \bmod 2$

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{3n+10}{2}, & \text{jika } u = c \\ \dfrac{n+2}{2}, & \text{jika } u = x_i,\ i \equiv 0 \bmod 2 \\ \dfrac{3}{2}(n+4), & \text{jika } u = x_i,\ i \equiv 1 \bmod 2 \\ \dfrac{3}{2}(n+i-2)+2(4-i), & \text{jika } u = y_i,\ i \equiv 0 \bmod 2 \\ \dfrac{n-i+1}{2}, & \text{jika } u = y_i,\ i \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

Pelabelan pada titik z_i, $1 \le i \le n + 6$ terbagi dalam dua kasus, yakni

Kasus 1. $n \equiv 0 \bmod 4$

`

$$f(z_i) = \begin{cases} \dfrac{n+i+5}{2}, & \text{untuk } i \equiv 1 \bmod 4 \text{ dan } i \neq n+5 \\ \dfrac{n+i+1}{2}, & \text{untuk } i \equiv 3 \bmod 4 \\ \dfrac{3}{2}(n+i)+(5-i), & \text{untuk } i \equiv 0 \bmod 4 \text{ dan } i \neq n+4 \\ \dfrac{3}{2}(n+i+2)+(4-i), & \text{untuk } i \equiv 2 \bmod 4 \text{ dan } i \neq n+2 \text{ dan } i \neq n+6 \\ 2n-i+9, & \text{untuk } i = n+5 \\ n+i+5, & \text{untuk } i = n+2 \text{ atau } i = n+4 \\ n+i+2, & \text{untuk } i = n+6 \end{cases}$$

Kasus 2. $n \equiv 2 \bmod 4$

$$f(z_i) = \begin{cases} \dfrac{n+i+5}{2}, & \text{untuk } i \equiv 1 \bmod 4 \\ \dfrac{n+i+1}{2} & \text{untuk } i \equiv 3 \bmod 4 \\ \dfrac{3}{2}(n+i+2)+(4-i) & \text{untuk } i \equiv 2 \bmod 4 \\ \dfrac{3}{2}(n+i+4)-(i+1) & \text{untuk } i \equiv 0 \bmod 4 \end{cases}$$

Perhatikan graf T(*2,n,n+6*) pada Gambar 1. Tanpa mengurangi keumuman sisi cx_2 berinsiden dengan titik c dan x_2 , sehingga jumlah dua label pada titik c, x_i dan y_i:

$$f(c) + f(x_2) = \frac{3n+10}{2} + \frac{n+2}{2} = 2n+6$$

$$f(x_1)+f(x_2)=\frac{3(n+(4))}{2}+\frac{n+2}{2}=2n+7$$

$$f(c)+f(y_1)=\frac{3n+10}{2}+\frac{n-(1)+1}{2}=2n+5$$

$$\{f(y_i)+f(y_{i+1}):1\le i\le n-1\}$$
$$=\{2n+4,2n+3,2n+2,\ldots,2n,2n-1,\ldots,n+7,n+6\}$$
$$=\{2n+4,2n+3,2n+2,\ldots,2n,2n-1,\ldots,2n-(n-7),2n-(n-6)\}$$

Kemudian jumlah dua label titik yang bertetangga pada himpunan titik z_i adalah sebagai berikut :

Kasus 1. $n\equiv 0 \bmod 4$

$$f(c)+f(z_1)=\frac{3n+10}{2}+\frac{n+(1)+5}{2}=2n+8$$

$$\{f(z_i)+f(z_{i+1}):1\le i\le n+5\}$$
$$=\{2n+11,2n+10,2n+9,2n+12,\ldots,3n+10,3n+9,3n+11,3n+13,3n+12\}$$
$$=\{2n+9,2n+10,2n+11,\ldots,3n+10,3n+11,3n+12,3n+13\}$$
$$=\{2n+9,2n+10,2n+11,\ldots,2n+(n+11),2n+(n+12),2n+(n+13)\}$$

Kasus 2. $n\equiv 2 \bmod 4$

$$f(c)+f(z_1)=\frac{3n+10}{2}+\frac{n+(1)+5}{2}=2n+8$$

$$\{f(z_i)+f(z_{i+1}):1\le i\le n+5\}$$
$$=\{2n+11,2n+10,2n+9,2n+12,\ldots,3n+12,3n+11,3n+13\}$$
$$=\{2n+9,2n+10,2n+11,2n+12\ldots,3n+11,3n+12,3n+13\}$$
$$=\{2n+9,2n+10,2n+11,2n+12,\ldots,2n+(n+12),2n+(n+13)\}$$

Berdasarkan hasil di atas, tampak bahwa jumlah dua label titik yang bertetangga membentuk suatu himpunan yang memuat bilangan bulat berurutan yaitu $S=\{f(v)+f(w)\mid vw\in E(T(2,n,n+6)\}$ dengan $maks(S)=2n+(n+13)$. Berdasarkan Lemma II.1, f dapat diperluas menjadi suatu pelabelan ajaib super dari T(*2,n,n+6*) dengan konstanta ajaib $k=(3+n+n+6)+(2+n+n+6)+(2n-(n-6))=5n+23$.

Teorema 2. Graf T(2,n,n+6) dengan n bilangan ganjil adalah Graf Super Sisi Ajaib dengan konstanta ajaib $k = 5n + 24$

Bukti :

Ambil titik-titik sesuai dengan himpunan titik pada graf T(*2, n, n + 6*), yakni x_i , $i = 1,2,$ y_i, $1 \le i \le n$ dan z_i, $1 \le i \le n + 6$.

Definisikan sebuah pelabelan titik pada graf T(*2,n,n + 6*)

Untuk $n \equiv 1 \bmod 2$

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{3n+11}{2}, & \text{jika } u = c \\ \dfrac{n+3}{2}, & \text{jika } u = x_i,\ i \equiv 0 \bmod 2 \\ \dfrac{3}{2}(n+3i)+2, & \text{jika } u = x_i,\ i \equiv 1 \bmod 2 \\ \dfrac{3}{2}(n+i+1)+2(2-i), & \text{jika } u = y_i,\ i \equiv 0 \bmod 2 \\ \dfrac{n-i+2}{2}, & \text{jika } u = y_i,\ i \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

Pelabelan pada titik z_i, $1 \le i \le n + 6$ terbagi dalam dua kasus, yakni

Kasus 1, $n \equiv 1 \bmod 4$

`

$$f(z_i) = \begin{cases} \dfrac{n+3i+4}{2}, & \text{untuk } i \equiv 1 \bmod 4 \\ \dfrac{n+i+2}{2}, & \text{untuk } i \equiv 3 \bmod 4 \\ \dfrac{3}{2}(n+i+1)+(4-i), & \text{untuk } i \equiv 0 \bmod 4 \text{ dan } i \ne n+3 \\ \dfrac{3}{2}(n+i+1)+(6-i), & \text{untuk } i \equiv 2 \bmod 4 \text{ dan } i \ne n+1 \text{ dan } i \ne n+5 \\ n+i+6, & \text{untuk } i = n+1 \text{ atau } i = n+3 \\ n+i+3, & \text{untuk } i = n+5 \end{cases}$$

Kasus 2, $n \equiv 3 \bmod 4$

$$f(z_i)=\begin{cases}\dfrac{n+i+2}{2}, & \text{untuk } i\equiv 1 \bmod 4 \text{ dan } i\neq 1,5,9\\ \dfrac{n+i}{2}+3 & \text{untuk } i=1\\ \dfrac{n+i}{2}+2 & \text{untuk } i=5\\ \dfrac{n+i}{2}+1 & \text{untuk } i=9\\ \dfrac{n+3i-2}{2}-(i-4), & \text{untuk } i\equiv 3 \bmod 4 \text{ dan } i\neq 3,7\\ \dfrac{n+2i+1}{2}-1 & \text{untuk } i=3 \text{ atau } i=7\\ \dfrac{n+i+1}{2}+(n+5), & \text{untuk } i\equiv 0 \bmod 4 \text{ dan } i\neq 4,8\\ \dfrac{3}{2}(n+i+1)+2, & \text{untuk } i=4\\ \dfrac{3}{2}(n+i+1), & \text{untuk } i=8\\ \dfrac{3}{2}(n+i+1)+(6-i), & \text{untuk } i\equiv 2 \bmod 4 \text{ dan } i\neq 2,6\\ \dfrac{3}{2}(n+i+1)+3, & \text{untuk } i=2\\ \dfrac{3}{2}(n+i+1)-2, & \text{untuk } i=6\end{cases}$$

Perhatikan graf T(*2,n,n+6*) pada Gambar 1. Tanpa mengurangi keumuman sisi cx_2 berinsiden dengan titik c dan x_2 , sehingga jumlah dua label pada titik c, x_i dan y_i:

$$f(c)+f(x_2)=\frac{3n+11}{2}+\frac{n+3}{2}=2n+7$$

$$f(x_1)+f(x_2)=\frac{3(n+3(1))}{2}+2+\frac{n+3}{2}=2n+8$$

$$f(c)+f(y_1)=\frac{3n+11}{2}+\frac{n-(1)+2}{2}=2n+6$$

$$\{f(y_i)+f(y_{i+1}):1\le i\le n-1\}$$
$$=\{2n+5,2n+4,2n+3,\ldots,2n,2n-1,\ldots,n+8,n+7\}$$
$$=\{2n+5,2n+4,2n+3,\ldots,2n,2n-1,\ldots,2n-(n-8),2n-(n-7)\}$$

Kemudian jumlah dua label titik yang bertetangga pada himpunan titik z_i adalah sebagai berikut :

Kasus 1, $n \equiv 1 \bmod 4$

$$f(c)+f(z_1)=\frac{3n+11}{2}+\frac{n+3(1)+4}{2}=2n+9$$

$$\{f(z_i)+f(z_{i+1}):1\le i\le n+5\}$$

$$=\{2n+12,2n+11,2n+10,2n+13,\ldots,3n+12\}$$
$$=\{2n+10,2n+11,2n+12,\ldots,3n+13,3n+14\}$$
$$=\{2n+10,2n+11,2n+12,\ldots,2n+(n+13),2n+(n+14)\}$$

Kasus 2, $n \equiv 3 \bmod 4$

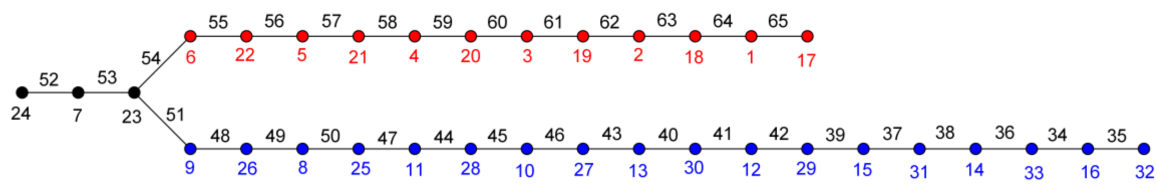
$$f(c)+f(z_1)=\frac{3n+11}{2}+\frac{n+(1)}{2}+3=2n+9$$

$$\{f(z_i)+f(z_{i+1}):1\le i\le n+5\}$$

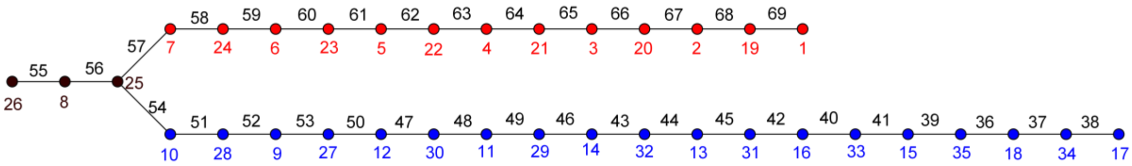
$$=\{2n+11,2n+10,2n+12,2n+17,\ldots,3n+14,3n+13,3n+12\}$$
$$=\{2n+10,2n+11,2n+12,\ldots,3n+12,3n+13,3n+14\}$$
$$=\{2n+10,2n+11,2n+12,\ldots,2n+(n+13),2n+(n+14)\}$$

Berdasarkan hasil di atas, tampak bahwa jumlahan dua label titik yang bertetangga membentuk suatu himpunan yang memuat bilangan bulat berurutan yaitu $S=\{f(u)+f(w)\mid vw\in E(T(2,n,n+6)\}$ dengan $maks(S)=2n+(n+14)$. Berdasarkan Lemma II.1, f dapat diperluas menjadi suatu pelabelan ajaib super dari T(*2,n,n+6*) dengan konstanta ajaib $k=(3+n+n+6)+(2+n+n+6)+(2n-(n-7))$ $=4(n+6)+n=5n+24$.

Berikut contoh pelabelan total sisi ajaib super pada graf T(2, 12, 18) dengan konstanta ajaib k = 83 dan pada graf T (2, 13, 19) dengan konstanta ajaib k = 89.



Gambar 2. Graf T(2, 12, 18)



Gambar 3. Graf T(2, 13, 19)

4. PENUTUP

Berdasarkan penelitian yang dilakukan dapat diperoleh bahwa graf T (*2,n,n+6*) merupakan Graf Super Sisi Ajaib, dengan konstanta ajaib dari graf T (*2,n,n+6*) untuk nilai *n* genap adalah $k = 5n + 23$, dan untuk nilai *n* ganjil adalah $k = 5n + 24$. Penelitian ini hanya mengkaji mengenai penentuan pelabelan total sisi ajaib super pada graf T(*2,n,n+6*). Pembahasan mengenai pelabelan *total sisi ajaib super* dan pengembangannya masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini, diantaranya pelabelan ajaib super dengan nilai konstanta ajaib yang berbeda untuk graf T(*2,n,n+6*), dan pelabelan total sisi ajaib super pada subdivisi dari graf $K_{1,3}$ untuk graf T(*m,n,k*) dengan $m \geq 2$ dan $k > n + 6$.

5. REFERENSI

Enomoto, H., Lladó, A. S., Nakamigawa, T., and Ringel, G., 1998, *Super Edge-Magic Graphs*, SUT J. Math., Vol. 34, No. 2 : 105-109, http://web.thu.edu.tw/wang/www/SEM_98.pdf

Gallian, Joseph A. 1997.*A Dynamic Survey of Graph Labeling*. Duluth: University of Minnesota Duluth.

Munir, Rinaldi, 2010. *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung. Bandung.

Ngurah, Anak Agung Gede. 2007. *Ketotalsisiajaiban Graf dan Defisiensinya.* ITB. Bandung. *Disertasi-S3.* https://digilib.itb.ac.id/index.php/gdl/view/7181

Sudarsana, I W., Noviana, Musdalifah, S., dan Kasim, A. A.. 2013. *Pelabelan Total Sisi Ajaib Super (Tsas) pada Gabungan Graf Bintang Ganda dan Lintasan*. Online Jurnal of Natural Science. Vol. 2 (1) : 1-10. http://jurnal.untad.ac.id/jurnal/index.php/ejurnalfmipa/article/view/1574