Mandalika Mathematics and Education Journal
Volume 6 Nomor 2, Desember 2024
e-ISSN 2715-1190| |p-ISSN 2715-8292
DOI: http://dx.doi.org/10.29303/jm.v6i2.8269

Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + nK_3$

Amrullah[1*], Harry S[1], K. Sarjana[1], L. Hayati[1]

[1] *Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Mataram, Mataram*

amrullah@unram.ac.id

Abstract

The metric dimension is a fundamental concept in graph theory that utilizes the vector representation of distances between vertices and a subset of vertices in a graph. This concept has broad applications in various fields, such as navigation, network localization, and network design. Let $G(V, E)$ be a connected graph with order n. A subset $L = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V(G)$ is called a resolving set, and the representation of a vertex v with respect to L is a vector $\left(d(v, v_1), d(v, v_2), \dots, d(v, v_k)\right)$, where $d(v, v_i)$ is the distance between v and v_i. The metric dimension of G, denoted as $\dim(G)$, is the smallest cardinality of L such that every vertex in G has a unique representation. The windmill graph $K_1 + nK_3$ is a graph obtained by connecting a vertex x in the complete graph K_1 to every vertex in n copies of the complete graph K_3. This paper employs a structural analysis method focused on the single vertex in K_1 and determines the vector representations of all vertices in the windmill graph by analyzing inter-vertex distances. The final result shows that the metric dimension, $\dim(K_1 + nK_3) = 2n$, where n is an integer $n \geq 2$.

Keywords: Wildmill graph; metrik dimension; vertex represntasi; complete graph.

Abstrak

Dimensi metrik adalah konsep fundamental dalam teori graf yang menggunakan representasi vektor jarak simpul terhadap sejumlah simpul dari graf. Konsep ini memiliki aplikasi luas di berbagai bidang, seperti navigasi, lokalisasi jaringan, dan perancangan jaringan. Misalkan G(V,E) graf terhubung dengan order n. Himpunan $L = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset V(G)$, representasi simpul v terhadap L adalah vektor $(d(v, v_1), d(v, v_2), \cdots, d(v, v_k))$ dengan $d(v, v_i)$ adalah jarak antara simpul v ke simpul v_i. Dimensi metrik G, $dim(G)$ adalah kardinalitas terkecil L sehingga setiap simpul dari G memiliki representasi yang berbeda. Graf kincir $K_1 + nK_3$ adalah graf yang diperoleh menghubungkan simpul x di graf lengkap K_1 ke setiap simpul dari n copy graf lengkap K_3. Tulisan ini menggunakan metode analisis struktur graf yang berpusat pada satu simpul K_1 dan penentuan representasi vektor setiap simpul graf kincir dengan analisis jarak antar simpul. Hasil akhir menunjukkan bahwa nilai dimensi metrik, $dim(K_1 + nK_3)$ adalah 2 kali n dimana bilangan bulat $n \geq 2$.

Kata Kunci: graf kincir; dimensi metrik; representasi simpul; graf lengkap.

1. PENDAHULUAN

Dimensi metrik dari sebuah ruang metrik pertama kali diperkenalkan oleh Blumental (1953). Secara intuitif, himpunan simpul dari sebuah graf yang dilengkapi dengan jarak dapat dianggap sebagai ruang metrik. Konsep dimensi metrik pada graf muncul secara alami dalam berbagai aplikasi. Misalnya, dalam suatu graf atau jaringan, jika diperlukan untuk menemukan sesuatu dengan menggunakan detektor yang ditempatkan pada simpul-simpul tertentu, maka setiap simpul harus dapat diidentifikasi secara unik berdasarkan jaraknya ke detektor tersebut. Ide ini telah dikembangkan hampir bersamaan oleh J. P. Slater (1975), yang menyebut himpunan simpul yang dapat menemukan setiap simpul sebagai locating set, dan oleh Harary dan Melter (1976), yang menyebut himpunan tersebut sebagai resolving set. Harary dan Melter juga memperkenalkan istilah dimensi metrik untuk menyatakan jumlah elemen dalam himpunan penyelesaian minimum.

Konsep ini telah diterapkan secara luas di berbagai bidang, seperti deteksi bahaya dalam jaringan (Karpovsky,1998; Ungrangsi, 2004), navigasi robot dalam jaringan (Khuller,1996; Melter, 1984), atau dalam kimia (Johnson, 1998). Dimensi metrik telah banyak diteliti, lihat misalnya [1,2,5-8,13,25,28,29] dan referensinya. Selain itu, ada beberapa pengembangan alami dari definisi dimensi metrik dalam literatur, termasuk penggabungannya dengan konsep dominasi, seperti yang dibahas dalam (Haynes,2006; Okamoto,2010; Saenpholphat,2004).

Perluasan lain dari dimensi metrik adalah dimensi k-metrik yang diperkenalkan dalam (Moreno, 2015), dan juga dibahas dalam (Beardon, 2019; Moreno,2016; Yero, 2017). Misalnya, jika sebuah robot sedang bernavigasi dalam jaringan dan menghitung lokasinya berdasarkan jarak ke sejumlah landmark yang terpasang di simpul-simpul tertentu, maka jika dua posisi hanya dibedakan oleh satu landmark dan komunikasi dengan landmark ini terputus, robot tidak akan dapat menentukan posisinya. Oleh karena itu, untuk meningkatkan akurasi deteksi atau ketahanan sistem, mungkin perlu memiliki sekumpulan detektor sehingga setiap pasangan simpul dapat dibedakan oleh setidaknya k simpul. Dimensi metrik graf lengkap telah di peroleh dari Chartrand bahwa $dim(K_n) = n$. Graf Kincir $K_1 + nK_m$ memiliki dimensi metrik yang berbeda dengan K_1 maupun K_m. Bagaimana penentuan dimensi metrik graf kinci menjadi hal yang menarik untuk dikaji. Pada hasil akhir, tulisan ini menyajikan bahwa dimensi graf kincir memiliki berhubungan n copi grafgraf lengkap K_m khusus untuk $m = 3$.

Diberikan sebuah graf sederhana dan terhubung $G = (V, E)$, dengan $V(G)$ sebagai himpunan simpul dan $E(G)$ sebagai himpunan sisi, sebuah himpunan $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\} \subset V(G)$ disebut himpunan pembeda untuk graf G jika dan hanya jika untuk setiap pasangan simpul yang berbeda $u, v \in V(G)$, jarak $d(u, w_i)$ tidak sama dengan $d(v, w_i)$ untuk setiap $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dimensi metrik dari graf G adalah kardinalitas terkecil dari sembarang himpunan pembeda dari graf G, dinotasikan dengan $dim(G)$..

2. METODE PENELITIAN

Penelitian diawal dengan pendefinisian representasi simpul dalam graf. Misalkan u dan v adalah dua *vertex* pada graf terhubung G, maka jarak dari u ke v adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G yang dinotasikan dengan $d(u,v)$. Untuk himpunan terurut $W = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ dari *vertex-vertex* dalam graf G dan *vertex* v pada G, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-*tuple*).

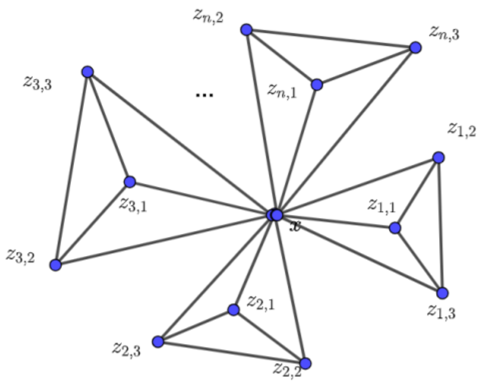
$$r(v|W) = \big(d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k)\big)$$

Pendefinisian Konsep dimensi metrik

Selanjutnya, penentuan basis dari graf. Jika representasi v terhadap W untuk setiap *vertex* v pada G berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari graf G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas terkecil disebut himpunan pembeda terkecil (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan dim (G).

Pendefinisian Graf Kincir

Objek yang ditelah adalah graf Kincir dengan K_3. Graf kincir $K_1 + nK_3$ terdiri jenis graf yang terdiri dari graf lengkap K_1 dan graf lengkap K_3 sebanyak n. Graf K_1 terdiri dari satu simpul, sedangkan graf lengkap K_3 memiliki n simpul dan n sisi, dimana setiap simpul dihubungkan dengan satu simpul pusat dan simpul-simpul lainnya membentuk segitiga. Sebagai ilustrasi perhatikan Gambar 1.



Gambar 1. Graf Kincir $K_1 + nK_3$

Misal x adalah *simpul pusat* dari graf G= $G = K_1 + nK_3$ dengan simpul K_3 copy ke-i disebut $simpul\ pinggir\ ke-i$ adalah $\{z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}\}$ sehingga $V(G) = \{x\} \cup \{z_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$

Menentukan dimensi metrik

Menentukan simpul-simpul yang akan digunakan sebagai himpunan pembeda, selanjutnya menghitung jarak dari setiap simpul dalam graf ke setiap simpul himpunan pembeda, kemudian memastikan setiap simpul dalam graf memiliki representasi jarak yang unik terhadap simpul-simpul himpunan pembeda. Berikut tahap penentuan dimensi metrik secara eksak.

1. Konstruksi himpunan pembeda dari graf kincir
2. Penentuan representasi setiap simpul graf dengan himpunan pembeda.
3. Menentukan batas atas maupun batas bawah dimensi metrik graf kincir.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

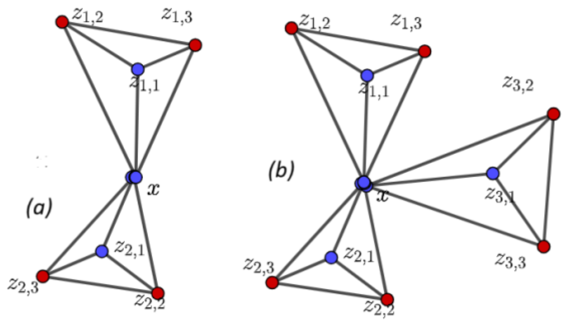
Perhatikan graf kincir, G= $G = K_1 + nK_3$ dengan simpul K_3 copy ke-i disebut simpilpinggir ke-I adalah $\{z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}\}$ sehingga $V(G) = \{x\} \cup \{z_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$, dan simpul pusat x dari kincir. Kajian dimulai dengan mengambil nilai m=2. Lemma 1 berikut memperlihatkan batas atas dimensi metriknya adalah 4.

Lemma 1.

Jika graf kincir $G = K_1 + 2K_3$, maka $dim(G) \leq 4$

Bukti

Misal himpunan L=$\{z_{1,2}, z_{1,3}, z_{2,2}, z_{2,3}\} \subset V(G)$.



Gambar 2 Graf Kincir $K_1 + nK_3$, (a) $n = 2$ (b) $n = 3$

Dengan menggunakan Gambar 2.a, terdapat 3 simpul yang tidak berada di L yaitu $x, z_{1,1}, z_{2,1}$, diperoleh representasi setiap simpul dapat dilihat seperti pada Tabel 1.

Tabel 1. Representasi simpul-simpul dari graf $K_1 + 2K_3$

No	Simpul v	$r(v\|L)$
1	x	(1,1,1,1)
2	$z_{1,1}$	(1,1,2,2)
3	$z_{1,2}$	(0,1,2,2)
4	$z_{1,3}$	(1,0,2,2)
5	$z_{2,1}$	(2,2,1,1)
6	$z_{2,2}$	(2,2,0,1)
7	$z_{2,3}$	(2,2,1,0)

Tabel 1 memperlihat setiap simpul memiliki representasi yang berbeda. Ini menunjukkan bahwa L adalah himpunan pembeda untuk G. Hal ini menunjukkan bahwa $dim(G) \leq 4$

Selanjut, nilai m ditingkatkan pada m=3, diperoleh nilai batas atas dari dimensi metri graf tersebut adalah 6.

Lemma 2.

Jika graf kincir $G = K_1 + 3K_3$, maka $dim(G) \leq 6$

Bukti

Misal himpunan L={$z_{1,2}, z_{1,3}, z_{2,2}, z_{2,3}$ }$\subset V(G)$.

Dengan menggunakan Gambar 2.b, terdapat 4 simpul yang tidak berada di L yaitu $x, z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,1}$. Diperoleh representasi setiap simpul seprti pada Tabel 2.

Tabel 2. Representasi simpul-simpul dari graf $K_1 + 3K_3$

No	Simpul v	$r(v\|L)$
1	x	(1,1,1,1,1,1)
2	$z_{1,1}$	(1,1,2,2,2,2)
3	$z_{1,2}$	(0,1,2,2,2,2)
4	$z_{1,3}$	(1,0,2,2,2,2)
5	$z_{2,1}$	(2,2,1,1,2,2)
6	$z_{2,2}$	(2,2,0,1,2,2)
7	$z_{2,3}$	(2,2,1,0,2,2)
8	$z_{3,1}$	(2,2,2,2,1,1)
9	$z_{3,2}$	(2,2,2,2,0,1,)
10	$z_{3,3}$	(2,2,2,2,1,0)

Dengan diperoleh representasi yang berbeda pada setiap simpul diatas, Ini menunjukkan bahwa L adalah himpunan pembeda untuk G dengan kata lain bahwa $dim(G) \leq 6$

Dengan pola yang hampir sama, untuk m=4,5,6 dan seterusnya, dapat dilkaukan secara umum. Oleh karena itu diperoleh Lemma untuk graf kincil secara umum $G = K_1 + nK_3$ yang tertuang dengan lemma 3 berikut ini

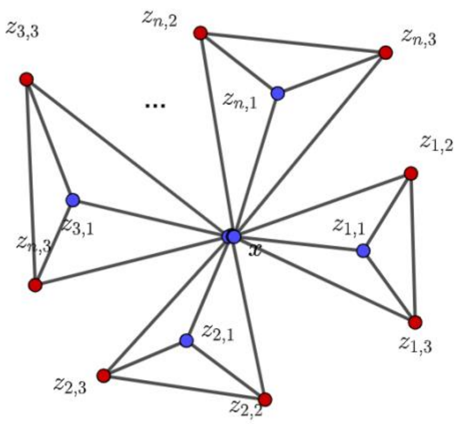
Lemma 3.

Jika graf kincir $G = K_1 + nK_3$, maka $dim(G) \leq 2n$

Bukti

Misal himpunan L={$z_{1,2}, z_{1,3}, z_{2,2}, z_{2,3}, z_{3,2}, z_{3,3}, z_{4,2}, z_{4,3}, \cdots, z_{n,2}, z_{n,3}$ }$\subset V(G)$.

Dengan desain L yang demikian diperoleh bahwa $|L| = 2n$



Gambar 3. Graf kincir $K_1 + nK_3$

Dengan menggunakan Gambar 3, terdapat $n+1$ simpul yang tidak berada di L yaitu $x, z_{1,1}, z_{2,1}, \cdots, z_{n,1}$ diperoleh representasi $r(x|L)$= (1,1,1,1,…,1,1) sedangkan $r(z_{i,1}|L)$ setiap komponennya bernilai 2 kecuali komponen ke (2i-1) dan (2i) bernilai 1. Ini menunjukkan setiap simpul memiliki representasi yang berbeda. Akibatnya bahwa L adalah himpunan pembeda untuk G dengan kata lain bahwa $dim(G) \leq 2n$

Berdasarkan hasil Lemma 3 diatas dapt diperoleh teorema yang lebih umum untuk nilai dimensi metrik dari graf kincir ini

Teorema 1.

Jika graf kincir $G = K_1 + nK_3$, maka $dim(G) = 2n$

Bukti.

Misal himpunan L={$z_{1,2}, z_{1,3}, z_{2,2}, z_{2,3}, z_{3,2}, z_{3,3}, z_{4,2}, z_{4,3}, \cdots, z_{n,2}, z_{n,3}$ } $\subset V(G)$.

Dengan desain L yang demikian diperoleh bahwa $|L| = 2n$.

Akan dibuktikan bahawa L adalah himpunan pembeda untuk graf G. Hal ini akan dibuktikan bahwa semua simpul memiliki representasi yang berbeda. Cukup dibuktikan bahwa n+1 simpul yang tidak berada dalam himpunan L, $\{x, z_{i,1} | 1 \leq I \leq n\}$ memiliki representasi yang berbeda. Hal ini jelas menunjukkan bahwa $r(z_{i,1}|L) \neq r(z_{j,1}|L)$ karena $d(z_{i,1}, z_{i,2}) = 1$ sedangan $d(z_{i,1}, z_{i,2}) > 1$ untuk setiap $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Pembuktian ini menunjukkan bahwa $dim(G) \leq 2n$ ………… (1)

Selanjutnya akan dibukti bahwa andaikan terdapat himpunan pembeda L sedemikian sehingga $|L| = 2n - 1$.

Jika $|L| = 2n$ maka dapat dibuat bahwa ada 2 simpul terpilih untuk himpun L dari setiap simpul pinggir ke-i. Jika $|L| = 2n - 1$ maka dipastikan ada simpul pinggir ke-I yang hanya terpilih paling banyak 1 simpul saja. Misalkan simpul pinggir ke-t. dan yang terpilih adalah simpul $z_{t,2}$ untuk himpul pembeda L. Hal ini mengakibatkan bahwa $z_{t,1}, z_{t,3} \notin L$. Karena $z_{t,1}, z_{t,3}$ berjarak sama ke setiap simpul pinggir $ke - j$ dengan $j \neq t$ dan $z_{t,1}, z_{t,3}$ berjarak 1 dengan $z_{t,2}$. Oleh karena diperoleh bahwa r$(z_{t,1}|L) =$ r$(z_{t,3}|L)$, kontradiksi. Akibatnya diperoleh $dim(G) \geq 2n$ ………… (2)

Berdasarkan pertidaksamaan (1) dan (2) diperoleh bahwa dimensi metrik dari graf kincir $G = K_1 + nK_3$, $dim(G) = 2n$

.

4. SIMPULAN

Setelah memperoleh hasil dan pembahasan diatas, dapat ditarik kesimpulan bahwa Graf kincir $K_1 + mK_3$, dengan $m \geq 2$, memiliki nilai eksak dimensi metrik adalah 2 kali banyak copy graf lengkap K_3. Dengan kata lain $dim(K_1 + mK_3) = 2\ m$.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

BArtikel ini merupakan artikel hasil penelitian PNBP, oleh karena itu ucapan terima kasih kepada Universitas Mataram yang telah memberikan dukungan dan bantuan dana untuk penelitian ini.

6. REFERENSI

Ali, G., Laila, R., & Ali, M. (2016). Metric dimension of some families of graph. *Math. Sci. Lett.*, 5(1), 99–102.

Bailey, R. F., & Cameron, P. J. (2011). Base size, metric dimension and other invariants of groups and graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 43, 209–242.

Beardon, A. F., & Rodríguez-Velázquez, J. A. (2019). On the k-metric dimension of metric spaces. *Ars Mathematica Contemporanea*, 16, 25–38.

Blumenthal, L. M. (1953). *Theory and Applications of Distance Geometry*. Clarendon Press.

Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Puertas, M. L., Seara, C., & Wood, D. R. (2007). On the metric dimension of Cartesian products of graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21, 423–441.

Chappell, G. G., Gimbel, J., & Hartman, C. (2008). Bounds on the metric and partition dimensions of a graph. *Ars Combinatoria*, 88, 349–366.

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105, 99–113.

Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P. (2000). The partition dimension of a graph. *Aequationes Mathematicae*, 59, 45–54.

Estrada-Moreno, A., Rodríguez-Velázquez, J. A., & Yero, I. G. (2015). The k-metric dimension of a graph. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 9(6), 2829–2840.

Estrada-Moreno, A., Rodríguez-Velázquez, J. A., & Yero, I. G. (2016). The k-metric dimension of corona product graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39, 135–156.

Estrada-Moreno, A., Rodríguez-Velázquez, J. A., & Yero, I. G. (2016). The k-metric dimension of the lexicographic product of graphs. *Discrete Mathematics*, 339(7), 1924–1934.

Estrada-Moreno, A., Rodríguez-Velázquez, J. A., & Yero, I. G. (2020). On the (k, t)-metric dimension of graphs. *The Computer Journal*. https://doi.org/10.1093/comjnl/bxaa009

Fehr, M., Gosselin, S., & Oellermann, O. R. (2006). The partition dimension of Cayley digraphs. *Aequationes Mathematicae*, 71(1–2), 1–18.

Harary, F., & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria*, 2, 191–195.

Haynes, T. W., Henning, M. A., & Howard, J. (2006). Locating and total dominating sets in trees. *Discrete Applied Mathematics*, 154, 1293–1300.

Johnson, M. (1993). Structure–activity maps for visualizing the graph variable arising in drug design. *Journal of Biopharmaceutical Statistics*, 3(2), 203–236.

Johnson, M. (1998). Browsable structure–activity datasets. In R. Carbó-Dorca & P. Mezey (Eds.), *Advances in Molecular Similarity* (Chap. 8). JAI Press Inc.

Karpovsky, M. G., Chakrabarty, K., & Levitin, L. B. (1998). On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory*, 44, 599–611.

Khuller, S., Raghavachari, B., & Rosenfeld, A. (1996). Landmarks in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 70(3), 217–229.

Melter, R. A., & Tomescu, I. (1984). Metric bases in digital geometry. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 25(1), 113–121.

Okamoto, F., Phinezy, B., & Zhang, P. (2010). The local metric dimension of a graph. *Mathematica Bohemica*, 135, 239–255.

Saenpholphat, V., & Zhang, P. (2004). Conditional resolvability in graphs: A survey. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 38, 1997–2017.

Slater, P. J. (1975). Leaves of trees. *Congressus Numerantium*, 14, 549–559.

Slater, P. J. (1988). Dominating and reference sets in a graph. *Journal of Mathematical and Physical Sciences*, 22(4), 445–455.

Tomescu, I. (2008). Discrepancies between metric dimension and partition dimension of a connected graph. *Discrete Applied Mathematics*, 308(22), 5026–5031.

Ungrangsi, R., Trachtenberg, A., & Starobinski, D. (2004). An implementation of indoor location detection systems based on identifying codes. In *Proceedings of Intelligence in Communication Systems, INTELLCOMM 2004* (Vol. 3283, pp. 175–189).

Yero, I. G., Estrada-Moreno, A., & Rodríguez-Velázquez, J. A. (2017). Computing the k-metric dimension of graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 300, 60–69. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.12.005

Yero, I. G., Kuziak, D., & Rodríguez-Velázquez, J. A. (2011). On the metric dimension of corona product graphs. *Computers & Mathematics with Applications*, 61, 2793–2798.

Yero, I. G., & Rodríguez-Velázquez, J. A. (2010). A note on the partition dimension of Cartesian product graphs. *Applied Mathematics and Computation*, 217(7), 3571–3574.