Mandalika Mathematics and Education Journal
Volume 7 Nomor 1, Maret 2025
e-ISSN 2715-1190| |p-ISSN 2715-8292
DOI: http://dx.doi.org/10.29303/jm.v7i1.8364

Matriks Copson dan Ruang Barisan

Salwa[1], Irwansyah[2], Zata Yumni Awanis[3], Abdurrahim[4], Nuzla Af'idatur Robbaniyah[5*]
[1,2,3,4,5] Matematika, FMIPA, Universitas Mataram Mataram

nuzla@unram.ac.id

Abstract
Sequence spaces are one of the topics in the field functional analysis such as null sequence space, converging sequence space and bounded sequence space designated c_0, c and l_∞ respectively. Those sequence spaces are normed spaces. Entry of Copson matrices denoted by $c_{j,k}$ with value $\frac{1}{k+1}$ for $0 \leq j \leq k$ and 0 for other j. Null sequence space, , converging sequence space and bounded sequence space with Copson matrices built new sequence spaces that are squence spaces $c_0\,(C^n)$, $c(C^n)$ and $l_\infty(C^n)$. The purpose of this study is to get some properties that occur to those sequence spaces with the same normed as sequence space $c_0\,(C^n)$. The results of this study are sequence spaces $c_0\,(C^n)$, $c(C^n)$ and $l_\infty(C^n)$are Banach spaces with mapping coordinate is continues (BK), there are inclusion properties on sequence spaces, sequence space $c_0(C^n)$ has AK property and sequence spaces $(C^n), c_0(C^n)$ and $l_\infty(C^n)$ are compact.
Keywords: *sequence spaces, Copson matrix, BK spaces, compactness.*

Abstrak
Ruang barisan merupakan salah satu topik penelitian dalam bidang analisis fungsional, seperti ruang barisan konvergen ke nol, ruang barisan konvergen dan ruang barisan terbatas yang berturut-turut dinotasikan dengan c_0, c dan l_∞. Ketiga ruang barisan tersebut merupakan ruang bernorma. Matriks Copson dengan entrinya dinotasikan dengan $c_{j,k}$ yang bernilai $\frac{1}{k+1}$ untuk $0 \leq j \leq k$ dan bernilai 0 untuk nilai j yang lain. Ruang barisan yang konvergen ke nol, ruang barisan konvergen dan ruang barisan terbatas yang dikenakan matriks Copson membentuk beberapa ruang barisan baru yaitu $c_0\,(C^n)$, $c(C^n)$ dan $l_\infty(C^n)$. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui beberapa sifat yang berlaku pada ruang barisan tersebut dengan norma yang sama pada ruang barisan $c_0\,(C^n)$. Pada penelitian diperoleh bahwa $c_0\,(C^n)$, $c(C^n)$ dan $l_\infty(C^n)$ merupakan ruang Banach dengan pemetaan koordinatnya kontinu (BK), berlaku sifat inklusi pada ketiga ruang barisan tersebut, ruang barisan $c_0(C^n)$ mempunyai sifat AK serta ruang barisan $c(C^n), c_0(C^n)$ dan $l_\infty(C^n)$ kompak.
Kata Kunci: Ruang Barisan, Matriks Copson, Ruang BK, Kekompakan

1. PENDAHULUAN

Ruang barisan merupakan salah satu contoh ruang bernorma dengan norma yang berlaku pada ruang tersebut (García-Pacheco et al., 2021; Lim, 1974). Sebagai contoh ruang fungsi kontinu pada interval tertutup. Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach, sedangkan ruang Banach yang pemetaan koordinatnya yaitu pemetaan

P_n dengan domain ruang Banach X dan kodomain himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ disebut ruang BK (Başar & Braha, 2016; E. Malkowsky & V. Rakočevi´c, 2001; Rahman & Karim, 2016). Sifat AK yang dimiliki oleh suatu ruang barisan juga menarik untuk diteliti (Ine, 2019). Ruang barisan yang dioperasikan dengan matriks takhingga akan membentuk matriks domain (Başar & Braha, 2016; E. Malkowsky & V. Rakočevi´c, 2001; Mursaleen & Noman, 2010; Peng-Nung & Peng-Yee, 1984; Roopaei & Foroutannia, 2016) Salah satu matriks yang dapat dioperasikan dengan ruang barisan konvergen dan terbatas adalah matriks Cesaro (Başar & Braha, 2016; Komal et al., 2016; Mursaleen & Başar, 2014; Peng-Nung & Peng-Yee, 1984; Rahman & Karim, 2016; Şengönül & Başar, 2005) sehingga membentuk matriks domain. Jika matriks Cesaro ditranspose akan membentuk matrik Copson (Mursaleen & Edely, 2021; Roopaei, 2020a, 2020b). Ruang barisan yang konvergen dan terbatas yang dilengkapi dengan matriks Copson akan membentuk ruang barisan baru yaitu $(C^n), c_0(C^n)$ dan $l_\infty(C^n)$ (Mursaleen & Edely, 2021; Roopaei, 2020a, 2020b; Roopaei & Foroutannia, 2016). Oleh karena itu tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui beberapa sifat yang tekait dengan ruang barisan konvergen dan terbatas yang dilengkapi dengan matriks Copson diantaranya adalah pemetaan koordinat yang kontinu dan sifat inklusi dari ruang barisan-ruang barisan tersebut.

2. METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini dilakukan studi literatur yang terkait dengan penelitian, kemudian membangun beberapa teorma serta membuktikan kebenaran dari teorema-teorema yang telah dibangun, khususnya pada ruang barisan $c_0\,(C^n)$, $c(C^n)$ dan $l_\infty(C^n)$.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum ke hasil dan pembahasan maka terlebih dahulu akan disampaikan beberapa definisi dan teorema-teorema yang merupakan dasar dari penelitian ini.

Definisi 1 (E. Malkowsky & V. Rakočevi´c, 2001) Didefinisikan ruang barisan konvergen ke nol, ruang barisan konvergen dan ruang barisan terbatas berturut-turut sebagai berikut

$$c_0 = \{x \in \omega : x = (x_n)\ barisan\ konvergen\ ke\ 0\}$$

$$c = \{x \in \omega : x = (x_n)\ barisan\ konvergen\}$$

$$l_\infty = \{x \in \omega : x = (x_n)\ barisan\ terbatas\}$$

dengan ω merupakan himpunan semua barisan bilangan real.
Salah satu contoh ruang Banach adalah ruang fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ yang dinotasikan dengan $C[a,b]$ dengan norma

$$\|x\| = max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

Definisi 2 (E. Malkowsky & V. Rakočevi´c, 2001) Diberikan $X \subset \omega$, ruang Banach X disebut ruang BK jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ pemetaan koordinatnya kontinu, $P_n : X \to \mathbb{R}$ dengan $P_n(x) = x_n$ untuk setiap $x \in X$.

Contoh 3 Salah satu contoh ruang BK adalah l_∞. Untuk menunjukkan l_∞ ruang BK pertama akan ditujukkan l_∞ ruang bernorma yang lengkap dengan norma $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Diambil sebarang barisan Cauchy $\left(x^{(n)}\right) \subset l_\infty$ dengan $\left(x^{(n)}\right) = \left(x_k^{(n)}\right)$, diberikan setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $\sup\left\{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| : m, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\| < \varepsilon$. Karena itu untuk setiap $i \geq 1$ berlaku $\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| \leq \sup\left\{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right| : n \in \mathbb{N}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Jadi$\left(x_i^{(n)}\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap maka $\left(x_i^{(n)}\right)$ konvergen katakan ke (x_i) atau $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = x_i$. Karena setiap barisan Cauchy merupakan barisan terbatas maka terdapat $M > 0$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $\|x^n\| = \sup\left\{\left|x_i^{(n)}\right| : n \in \mathbb{N}\right\} \leq M$. Akibatnya $\sup\{|x_i| : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} \sup\left\{\left|x_i^{(n)}\right| : n \in \mathbb{N}\right\} \leq M$. Jadi $(x_i) \in l_\infty$. Selanjutnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sup\left\{\left|x_i^{(n)} - x_i\right| : n \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{m\to\infty} \sup\left\{\left|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right| : m, n \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{m\to\infty} \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jadi $\left(x^{(n)}\right)$ konvergen ke $(x_i) \in l_\infty$. Oleh karena itu l_∞ merupakan ruang Banach.
Kedua ditunjukkan pemetaan koordinat pada l_∞ kontinu. Diambil sebarang $x \in l_\infty$ untuk sebarang $y \in l_\infty$ berlaku $|P_n(x) - P_n(y)| = |x_n - y_n| \leq \|x - y\|$. Kemudian diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, diambil $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ maka untuk setiap $y \in l_\infty$ dengan $\|x - y\| \leq \delta$ berlaku $|P_n(x) - P_n(y)| \leq \varepsilon$. Oleh karena itu P_n kontinu dan terbukti l_∞ merupakan ruang BK.

Definisi 4 (Başar & Braha, 2016) Matriks Domain X_A dengan A adalah matriks takhingga di ruang barisan X didefinisikan dengan

$$X_A = \{x: Ax \in X\}$$

dengan $Ax = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ dan a_{ij} merupakan entri dari matriks A.

Teorema 5 (E. Malkowsky & V. Rakočevi´c, 2001) Jika A matriks segitiga dan X ruang BK, maka X_A merupakan ruang BK terhadap

$$\|x\|_{X_A} = \|Ax\|$$

untuk setiap $x \in X$.

Berikut diberikan definisi sifat AK yang akan digunakan pada salah satu teorema yang ada dalam tulisan ini.

Definisi 6 (E. Malkowsky & V. Rakočevi´c, 2001) Diberikan X ruang BK dan $\varphi \subset X$ dengan φ adalah himpunan barisan yang elemen tak nolnya sebanyak berhingga, X dikatakan mempunyai sifat AK jika untuk setiap barisan $x = (x_k)$ di X dapat dinyatakan dengan

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{(k)}$$

atau $\lim\limits_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_k e^{(k)} = x$.

Definisi 7 (Mursaleen & Edely, 2021) Matriks Copson merupakan matriks segitiga atas yang entrinya didefinisikan dengan

$$c_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}, & 0 \le j \le k \\ 0, & yang\ lain \end{cases}$$

maksudnya untuk setiap $j, k \in \mathbb{N}_0$ matriksnya berbentuk

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Sedangkan matrik Copson dengan order n diberikan melalui definisi berikut

Definisi 8 (Mursaleen & Edely, 2021) Matriks Copson order $n > 0, n \in \mathbb{N}_0$ entrinya didefinisikan sebagai berikut

$$c_{j,k}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}}, & 0 \leq j \leq k \\ 0, & yang\ lain \end{cases}$$

Jika $n = 0$ maka $C^0 = I$ dengan I merupakan matriks identitas.

Contoh 9 matriks Copson dengan order $n = 3$

$$C^3 = \begin{bmatrix} 1 & {}^3/_4 & {}^6/_{10} & \cdots \\ 0 & {}^1/_4 & {}^3/_{10} & \cdots \\ 0 & 0 & {}^1/_{10} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Matriks Copson order n merupakan matriks yang *invertible,* dengan entri dari invesnya diberikan melalui Lemma berikut

Lemma 10 (Roopaei, 2020b) Matriks Copson order n, C^n dengan $n \in \mathbb{N}_0$, merupakan matriks *invertible* yang inversnya dinotasikan dengan $C^{-n} = \left(c_{j,k}^{-n}\right)$ yang entri matriksnya sebagai berikut

$$c_{j,k}^{-n} = \begin{cases} (-1)^{k-j} \binom{n}{k-j} \binom{n+j}{j}, & j \leq k \\ 0, & yang\ lain \end{cases}$$

Contoh 11 Invers matriks Copson order $n = 3$

$$C^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & \cdots \\ 0 & 4 & -12 & \cdots \\ 0 & 0 & 10 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan beberapa definisi dan teorema dihasilkan beberapa teorema berikut

Definisi 12 (Mursaleen & Edely, 2021) Ruang barisan konvergen ke nol, ruang barisan konvergen yang dilengkapi dengan matriks Copson sebagai berikut

$$c_0(C^n) = \left\{ x_k : \lim_{j \to \infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k = 0 \right\}$$

$$c(C^n) = \left\{ x_k : \lim_{j\to\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k \; ada \right\}.$$

Untuk lebih jelasnya berikut diberikan contoh barisan yang ada di ruang $c(C^n)$.

Contoh 13 Matriks Copson order $n = 1$, C, dan $x_k = \frac{1}{k+2}$. Berdasarkan Definisi 7 diperoleh deret tak hingga

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+2}$$

dan jumlahan parsialnya

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Jadi deret $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x_k$ konvergen.

Definisi 14 Ruang barisan terbatas yang dilengkapi dengan matriks Copson didefinisikan sebagai

$$l_\infty(C^n) = \left\{ x_k : sup \left| \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k \right| < \infty \right\}$$

Berikut diberikan contoh barisan di $l_\infty(C^n)$

Contoh 15 Matriks Copson order $n = 1$, C, dan $x_k = \frac{1}{k}$. Berdasarkan Definisi 7 diperoleh deret tak hingga

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

deret tersebut merupakan deret geometri dengan rasio $r = \frac{1}{2}$ sehingga

$$s_n \leq \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1/_2} < 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 2$$

sehingga diperoleh s_n terbatas.

Untuk mengkontruksi matriks domain pada ruang barisan c_0, c dan l_∞ maka perlu didiberikan beberapa definisi berikut.

Definisi 16 (Roopaei, 2020b) Ruang barisan $c_0(C^n)$ sebagi matriks domain didefinisikan sebagai

$$c_0(C^n) = (c_0)_{C^n}$$

Definisi 17 (Roopaei, 2020b) Ruang barisan $c(C^n)$ sebagi matriks domain didefinisikan sebagai

$$c(C^n) = (c)_{C^n}$$

Definisi 18 Ruang barisan $l_\infty(C^n)$ sebagai matriks domain didefinisikan sebagai

$$l_\infty(C^n) = (l_\infty)_{C^n}.$$

Untuk mempersingkat notasi barisan dalam ruang barisan $(c_0)_{C^n}$, $(c)_{C^n}$ dan $(l_\infty)_{C^n}$, dalam tulisan ini dibentuk barisan $\left(C^n(x)\right)_j = \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right)$ dengan $x = (x_k) \in \omega$.

Teorema yang terkait dengan sifat inklusi diberikan dari ruang barisan $(c_0)_{C^n}$, $(c)_{C^n}$ dan $(l_\infty)_{C^n}$ sebagai berikut.

Teorema 19 Ruang barisan $(c_0)_{C^n} \subset (c)_{C^n}$ dan $(c)_{C^n} \subset (l_\infty)_{C^n}$

Bukti: Diambil sebarang $(x_k) \in (c_0)_{C^n}$ diperoleh barisan $\left(C^n(x)\right)_j = \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right) \in c_0$, akibatnya $\left(C^n(x)\right)_j$ merupakan barisan konvergen atau dengan kata lain $(x_k) \in c(c)_{C^n}$. Jadi diperoleh $(c_0)_{C^n} \subset (c)_{C^n}$. Selanjutnya akan ditunjukkan $(c)_{C^n} \subset (l_\infty)_{C^n}$. Diambil sebarang $(x_k) \in (c)_{C^n}$ diperoleh $\left(C^n(x)\right)_j \in c$. Akibatnya $\left(C^n(x)\right)_j$ merupakan barisan yang konvergen, katakan konvergen ke u sehingga $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k = u$.

Oleh karena itu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left|\sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k - u\right| \leq \varepsilon$$

dipilih $\varepsilon = 1$ akibatnya $\left|\sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k - u\right| \leq 1$, sedangkan

$$\left|\sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right| - |u| \leq \left|\sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k - u\right| \leq 1.$$

Oleh karena itu $\left|\sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right| \leq 1 + |u|$ untuk setiap $m \geq n_0$. Dipilih

$M = maks\left\{\left|\sum_{k=j}^{1} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right|, \left|\sum_{k=j}^{2} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right|, \dots \left|\sum_{k=j}^{m-1} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right|, 1 + |u|\right\}$, akibatnya $\left|\sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right| < M$ untuk setiap $m \in N$. Dengan kata lain $\left(C^n(x)\right)_j \in (l_\infty)_{C^n}$. Jadi $(c)_{C^n} \subset (l_\infty)_{C^n}$.

Teorema yang terkait dengan ruang BK diberikan sebagai berikut.

Teorema 20 Ruang barisan $(c_0)_{C^n}$, $(c)_{C^n}$ dan $(l_\infty)_{C^n}$ merupakan ruang BK terhadap

$$\|x\|_{C^n} = \sup\left\{\left|\sum_{k=j}^{m} \frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}} x_k\right| : m, n \in N\right\}.$$

Bukti: Karena l_∞ merupakan ruang BK maka berdasarkan Teorema 4 diperoleh $(l_\infty)_{C^n}$ merupakan ruang BK. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ruang barisan $(c)_{C^n}$ merupakan ruang BK terhadap norma $\|x\|_{C^n}$.

Diambil sebarang barisan $\left(x^{(m)}\right) \in (c)_{C^n}$ dengan $\left(x^{(m)}\right) = \left(x_k^{(m)}\right)$ konvergen ke $u = (u_k)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N$ sehingga untuk setiap $m \geq n_0$ berlaku $\left\|x^{(m)} - u\right\| \leq \varepsilon$ atau $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = u$. Selanjutnya

$$\lim_{m\to\infty} P_k\left(x_k^{(m)}\right) = \lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = \sum_{k=j}^{\infty} (-1)^{k-j} \binom{n}{k-j} \binom{n+j}{j} u_k = P_k(u).$$

Jadi terbukti $(c)_{C^n}$ merupakan ruang BK. Analogi dengan cara tersebut bahawa ruang barisan $(c_0)_{C^n}$ juga merupakan ruang BK.

Teorema 21 Jika $\lim_{n\to\infty}\binom{n+k}{k}=\infty$ maka $(c_0)_{C^n}$ mempunyai sifat AK.

Bukti: Diambil sebarang $y=(y_k)\in\omega$ dengan $y_k\neq 0$ sebanyak berhingga dan akan ditunjukkan $y\in(c_0)_{C^n}$. Diandaikan $y\notin(c_0)_{C^n}$ diperoleh $\left(C^n(y)\right)_j\notin c_0$. Dipilih $y=e^{(k)}$ dengan $e^{(k)}=e_n^{(k)}=1$ untuk $n=k$ dan $e_n^{(k)}=0$ untuk $n\neq k$ diperoleh $C^n\left(e^{(k)}\right)\notin c_0$, hal ini kontradiksi dengan $e^{(k)}$ basis di c_0. Jadi $(y_k)\in(c_0)_{C^n}$ dan akibatnya $\varphi\subset(c_0)_{C^n}$ dengan φ himpunan barisan yang elemen tak nolnya sebanyak berhingga.

Selanjutnya diambil sebarang $x\in(c_0)_{C^n}$ diperoleh $\left(C^n(x)\right)_j\in c_0$, dan untuk setiap $m\in N$ berlaku

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}\right\|=\sup\left\{\left|\sum_{k=j}^{m}\frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}}\left(x_k-\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}\right)\right|:m\in N\right\}.$$

Selanjutnya

$$\lim_{m\to\infty}\left\|x-\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}\right\|=\lim_{m\to\infty}\sup\left\{\left|\sum_{k=j}^{m}\frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}}\left(x_k-\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}\right)\right|:m\in N\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sup\left\{\left|\sum_{k=j}^{m}\frac{\binom{n+k-j-1}{k-j}}{\binom{n+k}{k}}(x_k)\right|:m\in N\right\}=0$$

Jadi $\left\|x-\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}\right\|=0$ jika dan hanya jika $x-\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}=0$, akibatnya $x=\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}$.

Karena berlaku untuk setiap $m\in N$ maka $x=\sum_{k=1}^{m}xe^{(k)}$ dan $(c_0)_{C^n}$ mempunyai sifat AK.

Teorema 22 Ruang barisan $(c_0)_{C^n}$, $(c)_{C^n}$ dan $(l_\infty)_{C^n}$ kompak.

Bukti: Diambil sebarang barisan Cauchy (x_k) di $(l_\infty)_{C^n}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k, m \geq n_0$ berlaku $\|x_k - x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Karena $(l_\infty)_{C^n}$ lengkap maka barisan (x_k) konvergen katakan ke $x \in (l_\infty)_{C^n}$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku $\|x_k - x\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Selanjutnya dibentuk subbarisan $\left(x_{k_i}\right) \subset (x_k)$ dengan $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots.,\ n_i \in \mathbb{N}$ untuk setiap i,kemudian dipilih $n_2 = max\{n_0, n_1\}$ akibatnya untuk setiap $n \geq n_2$ berlaku

$$\left\|x_{k_i} - x\right\| \leq \left\|x_{k_i} - x_m\right\| + \|x_m - x_k\| + \|x_k - x\| \leq \varepsilon$$

Jadi subbarisan $\left(\eta_{n_i}\right)$ konvergen ke x, atau dengan kata lain $(l_\infty)_{C^n}$ kompak.
Untuk pembuktiam $(c_0)_{C^n}$ dan $(c)_{C^n}$ kompak sejalan dengan pembuktian ruang barisan $(l_\infty)_{C^n}$ kompak.

4. SIMPULAN

Adapun kesimpulan dari penelitian ini adalah adanya sifat inklusi diantara ruang barisan $c(C^n), c_0(C^n)$ dan $l_\infty(C^n)$, selain itu ketiga ruang barisan tersebut merupakan ruang BK serta ruang barisan $c_0(C^n)$ mempunyai sifat AK dan ruang barisan $c(C^n), c_0(C^n)$ dan $l_\infty(C^n)$ kompak.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kami ucapkan kepada fakultas MIPA Universitas Mataram atas dukungan dana dan ruang penelitian yang sudah diberikan kepada peneliti.

6. REKOMENDASI

Untuk peneliti selanjutnya bisa diteliti tentang transformasi antar ruang barisan yang dibangun dari matriks Copson dengan melihat sifat tologinya.

7. REFERENSI

Başar, F., & Braha, N. (2016). Euler-cesàro difference spaces of bounded, convergent and null sequences. *Tamkang Journal of Mathematics*, *47*(4), 405–420. https://doi.org/10.5556/j.tkjm.47.2016.2065

E. Malkowsky, G., & V. Rakočevi´c, N. (2001). Measure Of Noncompactness Of Linear Operators Between Spaces Of Sequences That Are (N, q) Summable Or Bounded. *Minnesota Law Review*, *51*(126), 505–522.

García-Pacheco, F. J., Kama, R., & Listán-García, M. del C. (2021). General methods of convergence and summability. *Journal of Inequalities and Applications*, *62*(1), 1–22. https://doi.org/10.1186/s13660-021-02587-x

Ine, M. E. D. (2019). *A Survey For Paranormed Sequence Spaces Generated By Infinite Matrices*. *September 2018*, 3–38.

Komal, B. S., Pandoh, S., & Raj, K. (2016). Multiplication operators on cesàro sequence spaces. *Demonstratio Mathematica*, *49*(4), 430–436. https://doi.org/10.1515/dema-2016-0037

Lim, K.-P. (1974). *IIxll 상홍(공홍; I x. l y)*. *14*(2), 221–227.

Mursaleen, M., & Başar, F. (2014). Domain of Cesàro mean of order one in some spaces of double sequences. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, *51*(3), 335–356. https://doi.org/10.1556/SScMath.51.2014.3.1287

Mursaleen, M., & Edely, O. H. H. (2021). Compact operators on sequence spaces associated with the Copson matrix of order α. *Journal of Inequalities and Applications*, *2021*(1), 1–11. https://doi.org/10.1186/s13660-021-02713-9

Mursaleen, M., & Noman, A. K. (2010). On the Spaces of λ-Convergent and Bounded Sequences. *Thai Journal of Mathematics*, *8*(2), 311–329. www.math.science.cmu.ac.th/thaijournal

Peng-Nung, N., & Peng-Yee, L. (1984). *Cesàro sequence spaces of non-absolute type*. *13*(May), 29–45.

Rahman, M. F., & Karim, A. B. M. R. (2016). Dual Spaces of Generalized Cesaro Sequence Space and Related Matrix Mapping. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention (IJMSI)*, *4*(4), 44–50.

Roopaei, H. (2020a). A study on Copson operator and its associated sequence space. *Journal of Inequalities and Applications*, *2020*(1), 1–19. https://doi.org/10.1186/s13660-020-02388-8

Roopaei, H. (2020b). A study on Copson operator and its associated sequence space II. *Journal of Inequalities and Applications*, *2020*(1), 1–20. https://doi.org/10.1186/s13660-020-02507-5

Roopaei, H., & Foroutannia, D. (2016). A New Sequence Space And Norm Of Certain Matrix Operators On This Space. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, *3*(1), 1–12. http://scma.maragheh.ac.ir

Şengönül, M., & Başar, F. (2005). *Some new Cesro sequence spaces of non-absolute type which include the spaces c0 and c*. *January*, 107–119.