Mandalika Mathematics and Education Journal
Volume 7 Nomor 2, Juni 2025
e-ISSN 2715-1190 | | p-ISSN 2715-8292
DOI: http://dx.doi.org/10.29303/jm.v7i2.8906

Eksistensi Fungsional Frobenius dan Simplektik Linear *Form* Pada Aljabar Lie $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$

Edi Kurniadi, Aurillya Queency, Firdaniza

Departemen Matematika FMIPA Unpad, Bandung

edi.kurniadi@unpad.ac.id

Abstract
The Lie algebra of affine Lie group $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$ is denoted by $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ whose elements are of the the form of $(n+1)\times(n+1)$ matrices. By Frobenius property, there exists a linear functional on its dual space corresponding to its linear symplectic form. The research aims to compute the explicit formula of the linear symplectic 2-form of $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ corresponding to a given linear functional. The research approach is a combination of the quantitative and qualitative and methods. The qualitative approach is delivered by literature studies and the quantitative method is applied by determining the explicit formula of symplectic 2-form of $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$. The main result shows that every Frobenius functional of affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ has always a linear symplectic 2-form which is skew-symmetric and non-degenerate. This condition implies that $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ is a Frobenius Lie algebra. In the other words, for the given linear functional $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ of $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R}) = \langle E_{ij}\rangle, 1\le i\le 3, 1\le j\le 4$, there exists the bilinear form $\beta_{\alpha_3} = E_{11}^*\wedge E_{12}^* + E_{12}^*\wedge E_{22}^* + E_{13}^*\wedge E_{32}^* + E_{21}^*\wedge E_{13}^* + E_{22}^*\wedge E_{23}^* + E_{23}^*\wedge E_{33}^* + E_{31}^*\wedge E_{14}^* + E_{32}^*\wedge E_{24}^* + E_{33}^*\wedge E_{34}^*$ depending on α and satisfying $\beta_{\alpha_3}(\gamma_1,\gamma_2) \coloneqq \alpha_3([\gamma_1,\gamma_2]), \forall\,\gamma_1,\gamma_2\in\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ which is symplectic. The results of this research can be generalized for higher dimension to compute he general formula of linear symplectic 2-form of $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R}), n\ge 4$.

Keywords: affine Lie algebra; Frobenius; Linear symplectic 2-form; functional linear

Abstrak
Aljabar Lie dari grup Lie *affine* $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{R})$ dinotasikan oleh $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ di mana setiap anggotanya dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berukuran $(n+1)\times(n+1)$. Sifat Frobenius ini mengakibatkan adanya Frobenius fungsional yang bekorepondensi dengan bentuk simplektiknya. Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk simplektik pada $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$. Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah kombinasi dari metode kuantitatif berupa penentuan rumus eksplisit simplektik linear 2-*form* pada $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ dan dan metode kualitatif berupa studi literatur. Hasil yang diperoleh bahwa setiap Frobenius fungsional dari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ senantiasa dapat dikonstruksi simplektik 2-*form* linear yang bersifat *skew*-simetrik dan *non-degenerate* sedemikian sehingga aljabar Lie *affine* ini bersifat Frobenius. Dengan kata lain, untuk fungsional linear $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ of $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R}) = \langle E_{ij}\rangle, 1\le i\le 3, 1\le j\le 4$, terdapat bentuk linear $\beta_{\alpha_3} = E_{11}^*\wedge E_{12}^* + E_{12}^*\wedge E_{22}^* + E_{13}^*\wedge E_{32}^* + E_{21}^*\wedge E_{13}^* + E_{22}^*\wedge E_{23}^* + E_{23}^*\wedge E_{33}^* + E_{31}^*\wedge E_{14}^* + E_{32}^*\wedge E_{24}^* + E_{33}^*\wedge E_{34}^*$ yang bergantung pada α dan memenuhi $\beta_{\alpha_3}(\gamma_1,\gamma_2) \coloneqq \alpha_3([\gamma_1,\gamma_2]), \forall\,\gamma_1,\gamma_2\in\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ yang bersifat simplektik. Hasil penelitian ini dapat dikembangkan untuk rumus umum bentuk simplektik $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R}), n\ge 4$.

Kata Kunci: Aljabar Lie *Affine*; Frobenius; Simplektik linear 2-form; Frobenius fungsional.

1. PENDAHULUAN

Bentuk simplektik mempunyai peranan penting dalam berbagai bidang ilmu seperti Fisika, Ekonomi, dan robotika. Dalam Fisika, bentuk simpletik sangat terkait dengan mekanika klasik dan mekanika kuantum. Dalam hal ini, bentuk simplektik mempunyai peranan penting untuk menjelaskan aspek geometri dari ruang fase dan struktur dari sistem Hamilton. Dalam bidang Ekonomi, bentuk simplektik berperan dalam menentukan model ekonomi dinamik seperti perumusan model ekonomi melalui sistem Hamilton. Selanjutnya dalam bidang robotika, bentuk simplektik dapat memformulasikan sistem gerak dan kendali mekanik.

Pemetaan linear antar ruang vektor dapat diperluas menjadi pemetaan bilinear dengan mendefinisikan hasil kali silang pada daerah asalnya dimana setiap komponennya memenuhi sifat linearitas seperti pada pemetaan linear. Di sisi lain, jika kodomain pada pemetaan linearnya dibatasi pada ruang vektor $\mathbb{R}$ maka diperoleh konsep fungsional linear. Dengan kata lain, fungsional linear adalah suatu pemetaan linear yang kodomainnya lapangan. Dengan cara yang sama, kodomain pada pemetaan bilinear dapat diubah menjadi $\mathbb{R}$ dan dengan menambahkan sifat *skew*-simetrik dan *nondegenerate* maka diperoleh konsep simplektik linear. Selanjutnya himpunan yang memuat semua fungsional linear dinamakan ruang vektor dual dan simplektik linear dinamakan bentuk simplektik (*sympelctic form*)(Humphreys, 1972; Lee, 2012; McInerney, 2013). Kedua konsep tersebut sangat terkait dengan aljabar Lie Frobenius (Alvarez et al., 2018; Diatta et al., 2020; Edi Kurniadi, 2021; Henti et al., 2021b; Ooms, 2009). Pada aljabar Lie Frobenius, fungsional linear ini dinamakan Frobenius fungsional dan dapat didefinisikan oleh bentuk bilinear *skew*-simetrik yang bersifat *non-degenerate.* Kondisi ini memotivasi untuk menentukan suatu bentuk simplektik dari Frobenius fungsional yang diberikan pada aljabar Lie Frobenius (Alvarez et al., 2018; Diatta & Manga, 2014; Gerstenhaber & Giaquinto, 2009).

Contoh yang sudah banyak diteliti tentang aljabar Lie yang bersifat Frobenius adalah aljabar Lie *affine* yang dinotasikan oleh $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ (Eswara Rao, 2023; Rais, 1978). Khususnya untuk $n = 1$, aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(1,\mathbb{R}) = \langle e_{11}, e_{12}\rangle$ berdimensi 2 adalah Frobenius karena untuk fungsional linear $\alpha_1 = e_{12}^*$ dapat dipilih $\beta_{\alpha_1} = e_{11}^* \wedge e_{12}^*$ sehingga pemetaan bilinear yang didefinisikan oleh $\beta_{\alpha_1}(a,b) = \alpha_1([a,b])$ bersifat *non-degenerate* (Alvarez et al., 2018; Diatta et al., 2020; Pham, 2016). Dengan kata lain, β_{α_1} ini adalah bentuk simplektik untuk α_1. Lebih lanjut, $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R}) = \langle e_{ij}\rangle$ dengan $1 \le i \le 2, 1 \le j \le 2$ mempunyai Frobenius fungsional $\alpha_2 = E_{12}^* + E_{23}^*$ yang berkorespondensi dengan bentuk simpletik $\beta_{\alpha_2} = E_{11}^* \wedge E_{12}^* + E_{12}^* \wedge E_{22}^* + E_{21}^* \wedge E_{13}^* + E_{22}^* \wedge E_{23}^*$ (Queency et al., 2024). Secara umum, dalam suatu aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}$, suatu fungsional linear α dapat ditentukan dari determinan matriks yang berelasi dengan Frobenius fungsionalnya. Berkaitan dengan Frobenius fungsional ini, selanjutnya akan dicari suatu bentuk simplektik β_α yang memenuhi kondisi $\beta_\alpha(\gamma_1,\gamma_2) = \alpha([\gamma_1,\gamma_2])$ untuk setiap $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathfrak{g}$ dengan $[\,,]$

mendefinisikan *bracket* Lie pada $\mathfrak{g}$. Kondisi ini, masih bisa dikembangkan untuk $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ yang berdimensi > 6 . Namun demikian, kompleksitas perhitungan membatasi penelitian ini hanya untuk kasus $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ dengan $n=3$ yang berdimensi 12. Hasil yang diperoleh mengkonfirmasi hasil sebelumnya (Pham, 2016) bahwa untuk setiap Frobenius fungsional terdapat bentuk simplektiknya. Meskipun demikian, hasil yang diperoleh dalam penelitian ini berbeda dengan hasil sebelumnya karena dalam penelitian ini diberikan rumus bentuk simplektik secara eksplisit dengan melakukan perhitungan langsung dan belum diperoleh dalam hasil penelitian sebelumnya (Pham, 2016). Untuk penelitian lanjutan, hasil penelitian ini dapat dikembangkan untuk mencari bentuk simplektik pada $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R}), n \geq 4$ yang berdimensi ≥ 20 dan aljabar Lie $\mathrm{M}(n,\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ (Henti et al., 2021a; Rais, 1978). Oleh karena itu, tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan bentuk simplektik pada $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ yang berkorespondensi dengan Frobenius linearnya.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini mengunakan metode/pendekatan kuantitatif dan kulitatif. Pendekatan kualitatif dilakukan dengan kajian literatur khususnya terkait bentuk simplektik pada aljabar Lie Frobenius yang sekaligus berkorepondensi dengan Frobenius fungsionalnya dan pendekatan kuantitatif dilakukan dengan menentukan rumus eksplisit bentuk simplektik aljabar Lie Frobenius *affine* $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$. Penentuan rumus ekplisit dan validasi bentuk simplektik dilakukan dengan perhitungan langsung pada persamaan yang dibentuk oleh Frobenius fungsionalnya. Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan Frobenius fungsioanl α untuk $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ dengan menghitung matriks *bracket* Lie-nya.
2. Menentukan bentuk simplektik β_α dari persamaan $\alpha[x,y]$ untuk setiap $x,y \in \mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$
3. Memvalidasi hasil yang diperoleh dengan memeriksa persamaa $\beta_\alpha(x,y)=\alpha[x,y]$ suatu bentuk simplektik.

Dalam penelitian ini, beberapa teori dasar yang mendukung penelitian ini khususnya tentang aljabar Lie Frobenius, Frobenius fungsional, dan bentuk simplektik akan dibahas kembali sebagai berikut:

Definisi 1 (Alvarez et al., 2018). Misalkan $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ suatu pemetaan linear. Jika $\mathfrak{h}=\mathbb{R}$ maka α dikatakan fungsional linear. Himpunan semua fungsional linear α pada $\mathfrak{g}$ dinamakan ruang dual dan dinotasikan oleh $\mathfrak{g}^*=\{\alpha\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{R}\ ; \alpha \text{ fungsional linear}\}$. Selanjutya jika $\mathfrak{g}$ suatu aljabar Lie Frobenius maka α dinamakan Frobenius fungsional.

Definisi 2 (McInerney, 2013). Misalkan $\mathfrak{g}$ suatu ruang vektor real. Fungsi $\beta\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dikatakan simplektik linear 2-*form* pada $\mathfrak{g}$ jika kondisi-kondisi berikut ini terpeneuhi:

1. β pemetaan bilinear

2. β *skew* simetrik, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathfrak{g}$ berlaku $\beta(a,b) = -\beta(b,a)$
3. β *non-degenerate,* yaitu jika $\gamma_1 \in \mathfrak{g}$ dengan sifat bahwa $\beta(\gamma_1,\gamma_2) = 0$ untuk setiap $\gamma_2 \in \mathfrak{g}$ maka $\gamma_1 = 0$.

Definisi 3 (Pham, 2016). Misalkan $\mathfrak{g}$ suatu aljabar Lie atas $\mathbb{R}$ dan $\alpha: \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ suatu fungsional linear. Pasangan $(\mathfrak{g}, \alpha)$ dikatakan aljabar Lie Frobenius jika pemetaan bilinear yang didefinisikan oleh

$$\beta(\gamma_1, \gamma_2) := \alpha([\gamma_1, \gamma_2]), \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{g} \tag{1}$$

merupakan simplektif linear 2-*form*.

Definisi 4(Eswara Rao, 2023). Notasi pembentuk himpunan $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ dapat direalisasikan sebagai berikut:

$$\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \boldsymbol{v} \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}),\ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{2}$$

dengan $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ adalah aljabar Lie dari $\mathrm{M}(n,\mathbb{R})$ yaitu himpunan semua matriks persegi real berordo $n \times n$.

Contoh 5. Anggota-anggota aljabar Lie $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ dapat dinyatakan dalam matriks berukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & x_1 \\ v_{21} & v_{22} & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2.$$

dengan *bracket* Lie tak nolnya ditentukan oleh relasi komutasi yang akan dijelaskan secara detail dalam bagian pembahasan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})$ merupakan aljabar Lie Frobenius. Sifat kefrobeniusan ini menunjukkan adanya Frobenius fungsional di $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{R})^*$. Di sisi lain, Pham (2016) mendefinisikan bahwa untuk suatu Frobenius fungsional senantiasa ada bentuk simplektik β_α. Temuan terkait bentuk simplektik ini dapat digunakan untuk mempelajari ruang fase dalam mekanika kuantum dan sistem Hamilton dalam model ekonomi. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini dinyatakan dalam 2 proposisi sebagai berikut dan diberikan juga bukti detailnya.

Proposisi 1. *Misalkan* $S = \{E_{ij}\} = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{34}\}$ *dengan* E_{ij} $(1 \le i \le 3, 1 \le j \le 4)$ *matriks berordo* 4×4 *yang entri* (i,j) *sama dengan* 1 *dan* 0 *lainnya merupakan basis* $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$. *Bracket Lie pada* $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ (Pham, 2016) *diberikan oleh*

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{li} E_{kj}. \tag{3}$$

Maka terdapat Frobenius fungsional $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ *yang termuat di ruang dual* $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})^*$.

Bukti. *Bracket* Lie tak nol dari $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ dapat diperoleh dengan cara menghitung langsung menggunakan Persamaan (3) atau dengan menggunakan penyisipan *bracket* Lie dari $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ (Queency et al., 2024). *Bracket* tak nol $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ dapat disisipkan ke dalam *bracket* tak nol $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$. Hubungan antara $x = [E_{ij}, E_{kl}] \in \mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ dan $\gamma \in \mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})^*$ dapat dihitung sebagai berikut (Pham, 2016):

$$\gamma(x) = \gamma\left(E_{ij}, E_{kl}\right) = \delta_{jk}\delta_{l,i+1} - \delta_{li}\delta_{j,k+1}. \tag{4}$$

Eksistensi Frobenius fungsional $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ dapat dibuktikan dengan menggunakan matriks struktur berordo 12×12 (Alvarez et al., 2018), yaitu:

$$M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right) = \left(\left[E_{ij}, E_{kl}\right]\right) = \begin{pmatrix} [E_{11}, E_{11}] & \dots & [E_{11}, E_{34}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [E_{34}, E_{11}] & \dots & [E_{34}, E_{34}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dengan *bracket* Lie-nya seperti pada persamaan (3). Determinan dari $M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right) = \left(\left[E_{ij}, E_{kl}\right]\right)$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\det M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right) = \det\left(\left[E_{ij}, E_{kl}\right]\right) = (E_{11}^2 E_{14} E_{22} E_{24} E_{34} + \cdots + E_{14} E_{23} E_{24} E_{32} E_{33} E_{34})^2. \tag{6}$$

Dari Persamaan (6) khususnya polinom-polinom yang memuat entri-entri E_{12}, E_{23}, dan E_{34}, dapat dipilih $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ dan klaim bahwa $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ adalah Frobenius fungsional untuk $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$. Untuk membuktikan klaim ini, misalkan $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})^*$ ruang dual dari $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ dengan nilai fungsional linearnya dihitung dengan menggunakan *trace* matriks, yaitu $\left\langle E_{ij}^*, E_{kl}\right\rangle = \mathrm{tr}(E_{ij}^* E_{kl})$. Nilai-nilai fungsional linear $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ pada entri-entri matriks struktur persamaan (6) dapat dihitung menggunakan rumus $\langle \alpha_3, M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right)\rangle$. Di sisi lain, dari hasil penelitian sebelumnya (Pham, 2016; Queency et al., 2024), karena determinan matriks

$$\left(\left\langle \alpha_3, M\left(\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})\right)\right\rangle\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

sama dengan 1 dan dengan sifat penyisipan $\mathfrak{aff}(2,\mathbb{R})$ pada $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ maka determinan matriks $\left(\left\langle \alpha_3, M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right)\right\rangle\right)$ juga bernilai nol. Akibatnya aljabar Lie $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ bersifat Frobenius. Jadi, $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ suatu Frobenius fungsional.

∎

Komentar 1. Dengan menggunakan Python, dapat dibuktikan bahwa determinan determinan matriks $\left(\langle\alpha_3, M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right)\rangle\right)$ juga sama dengan 1.

Fungsional linear dalam suatu ruang vektor $\mathfrak{g}$ adalah 1-*form* dan dapat diperluas menjadi bilinear form atau 2-*form* melalui *wedge product* yang dinotasikan oleh $\wedge$ (McInerney, 2013). Oleh karenanya, jika x^* dan y^* adalah 1-*form* maka $x^* \wedge y^*$ adalah bilinear form atau 2-*form* dan didefinisikan oleh

$$(x^* \wedge y^*)(a,b) = \det \begin{pmatrix} x^*(a) & x^*(b) \\ y^*(a) & y^*(b) \end{pmatrix}, \forall a,b \in \mathfrak{g}. \quad (8)$$

Proposisi 2. *Misalkan* $S = \{E_{ij}\} = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{34}\}$ *dengan* E_{ij} $(1 \le i \le 3, 1 \le j \le 4)$ *matriks berordo* 4×4 *yang entri* (i,j) *sama dengan* 1 *dan* 0 *lainnya merupakan basis* $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$. *Bracket Lie pada* $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ (Pham, 2016) *diberikan oleh Persamaan* (3). *Untuk Frobenius fungsional* α_3 *seperti pada Proposisi* 1, *terdapat bentuk simplektik* β_{α_3} *yang diberikan oleh*

$$\beta_{\alpha_3} = E_{11}^* \wedge E_{12}^* + E_{12}^* \wedge E_{22}^* + E_{13}^* \wedge E_{32}^* + E_{21}^* \wedge E_{13}^* + E_{22}^* \wedge E_{23}^* + E_{23}^* \wedge E_{33}^* + E_{31}^* \wedge E_{14}^* + E_{32}^* \wedge E_{24}^* + E_{33}^* \wedge E_{34}^* \quad (9)$$

sedemikian sehingga $\beta_\alpha(x,y) \coloneqq \alpha([x,y]), \forall\, x,y \in \mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$.

Bukti. Untuk menunjukkan terdapat β_{α_3}, kita hitung setiap entri pada matriks $\left(\langle\alpha_3, M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right)\rangle\right)$. Perhatikan bahwa fungsional linear α_3 bernilai tak nol hanya pada titik-titik di himpunan $N = \{E_{12}, E_{23}, E_{34}\}$ di mana *bracket* Lie antar elemen basis tersebut yang menghasilkan titik tersebut ada pada himpunan $N' = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24}, E_{31}, E_{32}, E_{33}, E_{34}\}$. Oleh karena itu, dapat dipilih 2-*form* β_{α_3} dalam Persamaan (9). Selanjutnya klaim bahwa β_{α_3} ini simplektik linear 2-*form*. Tetapi dari rumus $\alpha_3([E_{ij}, E_{kl}])$ pada Proposisi 1 di atas diperoleh bahwa $\beta_{\alpha_3}\left(E_{ij}, E_{kl}\right) \coloneqq \alpha_3([E_{ij}, E_{kl}])$. Tinggal ditunjukkan bahwa β_{α_3} *skew*-simetrik dan *non-degenerate.* Namun karena *bracket* Lie *skew*-simetrik maka β_α juga *skew*-simetrik. Menggunakan Proposisi 1 sebelumnya, dapat dihitung bahwa $\det\left(\langle \beta_{\alpha_3}, M\left(\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})\right)\rangle\right) = 1 \neq 0$. Akibatnya, β_{α_3} *non-degenerate.* Jadi, β_{α_3} bentuk simplektik untuk pada $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$.

■

4. SIMPULAN

Eksistensi Frobenius fungsional α pada suatu aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}$ mengakibatkan adanya bentuk bilinear form β_α yang didefinisikan oleh $\beta_\alpha(\gamma_1,\gamma_2) \coloneqq \alpha([\gamma_1,\gamma_2]), \forall\, \gamma_1,\gamma_2 \in \mathfrak{g}$ yang bersifat simplektif. Khususnya untuk $\mathfrak{aff}(3,\mathbb{R})$ telah dibuktikan untuk Frobenius fungsional $\alpha_3 = E_{12}^* + E_{23}^* + E_{34}^*$ terdapat simplektik linear 2-*form* $\beta_{\alpha_3} = E_{11}^* \wedge E_{12}^* + E_{12}^* \wedge E_{22}^* + E_{13}^* \wedge E_{32}^* + E_{21}^* \wedge E_{13}^* + E_{22}^* \wedge E_{23}^* + E_{23}^* \wedge E_{33}^* + E_{31}^* \wedge E_{14}^* + E_{32}^* \wedge E_{24}^* + E_{33}^* \wedge E_{34}^*$ dengan

$\beta_{\alpha_3}(\gamma_1, \gamma_2) \coloneqq \alpha_3([\gamma_1, \gamma_2]), \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{aff}(3, \mathbb{R})$ bersifat simplektik. Hasil yang diperoleh dapat digunakan untuk menganalisis sifat geometri dari ruang fase dalam mekanika klasik dan penyelesaian sistem Hamilton dalam model ekonomi. Penelitian ini masih terbatas pada $\mathfrak{aff}(3, \mathbb{R})$ yang berdimensi 12. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya, eksistensi bentuk simplektik untuk $\mathfrak{aff}(n, \mathbb{R}), n > 3$ dan bentuk eksplisitnya masih terbuka untuk diteliti.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada *reviewers* atas saran dan masukan yang sangat berharga dalam perbaikan naskah artikel ini.

6. REKOMENDASI

Hasil penelitian ini dapat dikembangkan untuk menetukan rumus umum simplektik 2-*form* dari $\mathfrak{aff}(n, \mathbb{R}), n \geq 4$ dan aljabar Lie $\mathrm{M}(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

7. REFERENSI

Alvarez, M. A., Rodríguez-Vallarte, M. C., & Salgado, G. (2018). Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical. *Communications in Algebra*, *46*(10), 4344–4354. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1439048

Diatta, A., & Manga, B. (2014). On Properties of Principal Elements of Frobenius Lie Algebras . *Journal of Lie Theory*, *24*(3), 849–864.

Diatta, A., Manga, B., & Mbaye, A. (2020). *On systems of commuting matrices, Frobenius Lie algebras and Gerstenhaber's Theorem*. http://arxiv.org/abs/2002.08737

Edi Kurniadi. (2021). *Dekomposisi dan Sifat Matriks Struktur Pada Aljabar Lie Frobenius Berdimensi 4*.

Eswara Rao, S. (2023). Hamiltonian extended affine Lie algebra and its representation theory. *Journal of Algebra*, *628*, 71–97. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.02.031

Gerstenhaber, M., & Giaquinto, A. (2009). The Principal Element of a Frobenius Lie Algebra. *Letters in Mathematical Physics*, *88*(1–3), 333–341. https://doi.org/10.1007/s11005-009-0321-8

Henti, H., Kurniadi, E., & Carnia, E. (2021a). Quasi-Associative Algebras on the Frobenius Lie Algebra $M_3(\mathbb{R}) \oplus gl_3(\mathbb{R})$. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, *12*(1), 59–69. https://doi.org/10.24042/ajpm.v12i1.8485

Henti, Kurniadi, E., & Carnia, E. (2021b). On Frobenius functionals of the Lie algebra $M_3(\mathbb{R}) \oplus gl_3(\mathbb{R})$. *Journal of Physics: Conference Series*, *1872*(1), 012015. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1872/1/012015

Humphreys, J. E. (1972). *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* (Vol. 9). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6398-2

Lee, J. M. (2012). *Introduction to Smooth Manifolds* (Vol. 218). Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5

McInerney, A. (2013). *First Steps in Differential Geometry*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7732-7

Ooms, A. I. (2009). Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras. *Journal of Algebra*, *321*(4), 1293–1312. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.026

Pham, D. N. (2016). $\mathfrak{g}$-quasi-Frobenius Lie algebras. *Archivum Mathematicum*, *4*, 233–262. https://doi.org/10.5817/AM2016-4-233

Queency, A., Kurniadi, E., & Firdaniza, F. (2024). Struktur Simplektik pada Aljabar Lie Affine aff(2,R). *Jambura Journal of Mathematics*, *6*(1), 62–67. https://doi.org/10.37905/jjom.v6i1.23254

Rais, M. (1978). La représentation coadjointe du groupe affine. *Annales de l'institut Fourier*, *28*(1), 207–237. https://doi.org/10.5802/aif.686